FLORENTIN SMARANDACHE

ASUPRA UNOR NOI FUNCŢII ÎN TEORIA NUMERELOR

Λ

$\mathcal{N}_d$ $\mathcal{N}_0$

$$F^d(n) = \sum_{k \le_d n} \Lambda(k) = \ln n \qquad F(n) = \sum_{k \le n} \Lambda(k) = \psi(n)$$

$\mathcal{N}_d$ $\mathcal{N}_0$ $\mathcal{N}_d$ $\mathcal{N}_0$

2.1. $\widetilde{F}^d(n) = \sum_{k \le_d n} \ln k$

2.2. $\widetilde{F}(n) = \sum_{k \le n} \ln k = \ln n!$

2.3. $\widetilde{\psi}^d(n) = \sum_{k \le_d n} \psi(k)$

2.4. $\widetilde{\psi}(n) = \sum_{k \le n} \psi(k$

$\mathcal{N}_d$ $\mathcal{N}_0$ $\mathcal{N}_d$ $\mathcal{N}_0$ $\mathcal{N}_d$ $\mathcal{N}_0$ $\mathcal{N}_d$ $\mathcal{N}_0$

... ...


Chişinău - 1999

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

CATEDRA DE ALGEBRĂ

FLORENTIN SMARANDACHE

ASUPRA UNOR NOI FUNCŢII ÎN TEORIA NUMERELOR

Chişinău - 1999

Prof. Florentin Smarandache
University of New Mexico
Gallup, NM 87301, USA
Fax: (505) 863-7532 (Attn. Dr. Smarandache)
E-mail: smarand@unm.edu
URL: http://www/gallup.unm.edu/~smarandache/

Diagrama de pe coperta I reprezintă funcţia zeta a lui Riemann (p. 49).

Iar tabelul de pe coperta IV reprezintă funcţia S ca funcţie sumatoare (p. 61).

Secţia poligrafie operativă
a U.S.M. 2009, Chişinău,
Str. A.Mateevici, 60

Mamei mele

ASUPRA UNOR NOI FUNCTII IN TEORIA NUMERELOR

Introducere

Performantele matematicii actuale,ca si descoperirile din viitor isi au,desigur, inceputul in cea mai veche si mai aproape de filozofie ramura a matematicii, in teoria numerelor.

Matematicienii din toate timpurile au fost, sunt si vor fi atrasi de frumusetea si varietatea problemelor specifice acestei ramuri a matematicii.

Regina a matematicii, care la randul ei este regina a stiintelor, dupa cum spunea Gauss, teoria numerelor straluceste cu lumina si atractiile ei, fascinandu-ne si usurandu-ne drumul cunoasterii legitatilor ce guverneaza macrocosmosul si microcosmosul.

De la etapa antichitatii, cand teoria numerelor era cuprinsa in aritmetica, la etapa aritmeticii superioare din perioada Renasterii, cand teoria numerelor a devenit parte de sine statatoare si ajungand la etapa moderna din secolele XIX si XX,cand in teoria numerelor isi fac loc metode de cercetare din domenii vecine, ca teoria functiilor de variabila complexa si analiza matematicii drumul este lung, insa dens, cu rezultate surprinzatoare, ingenioase si culte nu numai teoriei propriuzise a numerelor, dar si altor domenii ale cunoasterii, atat teoretice cat si practice.

In lucrarea aceasta,(capitolul II si III), plecand de la o functie numerica specifica teoriei elementare a numerelor

$$S : N^* \longrightarrow N^*$$

S(n) este cel mai mic numar natural al carui factorial este divizibil cu n, prezentam proprietati si legaturi ale acestei functii numerice

clasice, dar proprietati asimptotice specifice teoriei analitice a numerelor .

Sunt de asemenea prezentate generalizarea lui S la multimea Q* a numerelor rationale nenule, ca si alte functii, obtinute prin analogie cu definitia lui S.

Capitolul I este dedicat unor probleme diverse,tinute de autor in special in domeniul teoriei congruentelor.

Interesul international de care se bucura functiile S si diversele ei generalizari ne bucura si constitue un motiv pentru care am introdus in aceasta lucrare si prezentarea unora dintre ele.

Tin sa multumesc in special domnului profesor Vasile Seleacu, de la Universitatea din Craiova,cu care am deprins dragostea de aritmetica si teoria numerelor , dar multumesc de asemenea tuturor celor care ,pe parcursul anilor au contribuit la formarea mea matematiaca.

Multumesc de asemenea parintilor mei,care m-au indemnat spre invatatura ,m-au ajutat si ma ajuta spre acest drum minunat.

AUTORUL
(iunie 1995)

Capitolul 1
GENERALIZAREA UNOR TEOREME DE CONGRUENȚĂ

1.1. Noțiuni introductive

Fie m un număr întreg și pozitiv, pe care îl vom numi *modul*. Cu ajutorul lui se introduce în mulțimea Z a numerelor întregi o relație binară, numită *de congruență* și notată prin ≡, astfel:

1.1.1. Definiție. Numerele întregi a și b sunt congruente față de modulul m dacăși numai dacă m divide diferența a – b.

Avem deci

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b = km$, unde $k \in z$ (1.1.1.)

1.1.2. Consecință: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow$ a și b dau, prin împărțire la m, același rest

Se știe că relația de congruență definită la (1.1.1.) este o relație de echivalență (este reflexivă, simetrică și tranzitivă). Ea mai are însă și următoarele proprietăți remarcabile:

$a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ și $a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \Rightarrow$

(i) $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$

(ii) $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \pmod{m}$

(iii) $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$

Mai general, dacă $a_i \equiv b_i \pmod m$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, iar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un polinom cu coeficienți întregi, atunci

(iv) $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv f(b_1, b_2, \ldots, b_n) \pmod m$

Se pot demonstra și următoarele proprietăți ale congruențelor:

(v) $a \equiv b \pmod m$ și $c \in N^* \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$

(vi) $a \equiv b \pmod m$ și $n \in N^*$, n divide $m \Rightarrow a \equiv b \pmod n$

(vii) $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = \overline{i, s} \Rightarrow a \equiv b \pmod m$

unde $m = [m_1, m_2, \ldots, m_s]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor m_i.

(viii) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow (a, m) = (b, m)$

unde prin (x, y) notăm cel mai mare divizor comun al numerelor x și y.

Deoarece relația de concurență mod m este o relație de echivalență, ea împarte mulțimea Z a numerelor întregi în clase de echivalență (clase de congruență mod m). Două astfel de clase sunt sau disjuncte sau coincid.

Cum orice număr întreg dă, prin împărțire la m unul din resturile 0, 1, 2, ..., m-1, rezultă că

$C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$

sunt cele m clase de resturi mod m, unde C_i este mulțimea nuerelor întregi congruente cu $i \pmod m$.

Uneori este util să se considere, în locul claselor, reprezentanți care să satisfacă diferite condiții. Astfel, este consacrată următoarea terminologie:

1.1.2. Definiție. Numerele întregi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ formează un *sistem complet de resturi mod m* dacă oricare dintre ele sunt necongruente mod m.

Rezultă că un sistem complet de resturi mod m conține câte un reprezentant din fiecare clasă.

Dacă φ este funcția lui Euler (φ_n) este numărul numerelor naturale mai mici decît n și prime cu n), atunci avem și:

1.1.3. Definiție Numerele întregi $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ formează un *sistem redus de resturi mod m* dacă fiecare este prim cu modulul și oricare două sunt necongruente mod m. Se știe că are loc următoarea teoremă:

1.14. Teoremă (i) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_m$ este un sistem complet de resturi mod m și a este un număr întreg, prim cu m, atunci șirul

$a\,a_1, a\,a_2, \ldots, a\,a_m$

este tot un sistem complet de resturi mod m.

(ii) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ este un sistem redus de resturi mod m și a este un număr întreg prim cu m, atunci șirul

$a\,a_1, a\,a_2, \ldots, a\,a_{\varphi(m)}$

este tot un sistem redus de resturi mod m.

Dacă notăm cu Z_m mulțimea claselor de resturi mod m:

$Z_m = \{C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}\}$

și definim operațiile

$+: Z_m \times Z_m \to Z_m$

$\cdot: Z_m \times Z_m \to Z_m$

prin

$C_i + C_j = C_k$, unde $k \equiv i + j \pmod m$

$C_i \cdot C_j = C_h$, unde $h \equiv i \cdot j \pmod m$

atunci are loc

1.1.5. Teoremă.

(i) $(Z_m, +)$ este grup comutativ

(ii) $(Z_m, +, \cdot)$ este inel comutativ

(iii) $(G_m, \cdot)$ este grup comutativ,

unde $G_m = \{Cr_1, Cr_2, \ldots, Cr_{\varphi(m)}\}$

este mulţimea claselor de resturi prime cu modulul.

1.1.6. Consecinţă. Mulţimea Z_p a claselor de resturi faţă de un modul prim p formează corp comutativ faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire definite mai sus.

1.2. Teoreme de congruenţă din teoria numerelor

În acest paragraf vom aminti cîte va teorem de congruenţă din teoria numerelor (teoremele Fermat, Euler, Wilson, Gauss, Lagrange, Leibniz, Moser şi Sierpinski) pe care în paragraful următor le vom generaliza şi vom pune în evidenţă un punct de vedere unificator pentru ele.

În 1640 enunţă, fără a demonstra, următoarea teoremă:

1.2.1. Teoremă ***(Fermat)***. Dacă întregul a nu este divizibil prin numărul prim p, atunci

$a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$

Prima demonstraţie a acestei teoreme a fost dată în 1736 de către Euler.

După cum se ştie, reciproca teoremei lui format nu este adevărată. Cu alte cuvinte, din

$a^{m-1} \equiv 1 \ (\text{mod } m)$

şi m nu este divizibil cu a, nu rezultă cu necesitate că m este număr prim.

Nu este adevărat nici măcar că dacă (1.2.1.) este adevărată pentru toate numerele a prime cu m, atunci m este prim, după cum se poate vedea din exemplul următor (H_1).

Fie m = 561 = 3 · 11 · 17. Dacă a este un întreg care nu este divizibil cu 3, cu 11 sau cu 17, avem desigur:

$a^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$, $a^{10} \equiv 1 \ (\text{mod } 11)$, $a^{16} \equiv 1 \ (\text{mod } 17)$

conform teoremei directe a lui Fermat. Dar cum 560 este divizibil cu 2 şi 10, cît şi uc 16, deduce:

$a^{560} \equiv 1(\text{mod } m_i)$, i = 1, 2, 3

unde $m_1 = 3$, $m_2 = 11$, $m_3 = 17$

Conform proprietăţii (vii) din paragraful precedent rezultă

$a^{560} \equiv 1 \ (\text{mod } m_1 m_2 m_3)$

adică $a^{m-1} \equiv 1 \ (\text{mod } m)$, pentru m = 561.

De altfel, se ştie că 561 este cel mai mic număr compus care satisface (1.2.1.). Urmează numerele 1105, 1729, 2465, 2821, ...

Prin urmare, congruenţa (1.2.1.) poate fi adevărată pentru un anume întreg a şi un număr compus m.

1.2.2. Definiţie. Dacă (1.2.1.) este satisfăcută pentru un umăr compus m şi un număr întreg a se spune că m este *pseudoprim faţă de a.* Dacă m este pseudoprim faţă de orice întreg a prin cu m, se spune că m este un *număr Carmichael.*

Matematicianul american Robert D. Carmichael a fos tprimul care în anul 1910 a pus în evidenţă astfel de numere, numite *numere prime impostoare.*

Până nu demult nu se ştia dacă există sau nu o infinitate de numere Carmichael. În chiar primul număr al revistei „What's

Happening in the Mathematical Sciences", revistă în care sunt anunţate în fiecare an rezultatele mai importante obţinute în matematică în ultima vreme, se anunţă că trei matematicieni: Alford, Grandville şi Pomerance, au arătat că există o infinitate de numere Carmichael.

Demonstraţia trioului de matematicieni americani se bazează pe o observaţie euristică din 1956 a matematicianului maghiar de renume internaţional P. Erdös. Ideea de bază este de a alege un număr L pentru care există multe numere prime p care nu divid pe L, dar cu proprietatea că p-1 divide pe L. Apoi se arată că aceste numere prime pot fi înmulţite între ele în multe feluri astfel încît fiecare produs să fie congruent cu 1 mod L. Rezultă că fiecare astfel de produs este un număr Carmichael.

De exemplu, pentru L = 120, numerele prime care îndeplinesc condiţia amintită mai sus sunt:

$p_1 = 7$, $p_2 = 11$, $p_3 = 13$, $p_4 = 31$, $p_5 = 41$, $p_6 = 61$.

Rezultă că $41041 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41$, $172081 = 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$ şi $852841 = 11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61$ sunt congruente cu 1 mod 120, deci sunt numere Carmichael.

Menţionăm că observaţia euristică a lui P. Erdös se bazează pe următoarea teoremă de caracterizare a numerelor Carmichael, demonstrată în anul 1899.

1.2.3. Teoremă *(A. Korselt)*. Numărul n este un număr Carmichael dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile

(C_1) este liber de pătrate

(C_2) p – 1 divide pe n – 1 ori de cîte ori p este un divizor prim al lui n.

Cei trei matematicieni americani au demonstrat următoarea teoremă:

1.2.4. Teoremă ***(Alford, Granville, Pomerance).*** Există cel puțin $x^{2/7}$ numere Carmichael mai mari decît x, pentru x suficient de mare.

Cu ajutorul argumentului euristic datorat lui P. Erdös se poate demonstra că exponentul 2/7 din teorema de mai sus poate fi înlocuit cu orice alt exponent subunitar.

1.2.5. Teoremă ***(Euler).*** Dacă $(a, m) = 1$, atunci

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Această teoremă, care generalizează teorema lui Fermat, a fost demonstrată de Euler în 1760.

1.2.6. Teoremă ***(Wilson).*** Dacă p este un număr prim, atunci

$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$

Se știe că reciproca teoremei lui Wilson este adevărată, adică are loc.

1.2.7. Teoremă. Dacă $n > 1$ este un număr întreg și

$(n-1)! + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$

atunci n este număr prim.

Teorema lui Wilson a fost publicată prima dată în 1770 de matematicianul Waring *(meditationes algebraicae),* dar ea a fost cunoscută cu mult înainte, chiar de Leibniz.

Lagrange generalizează teorema lui Wilson astfel:

1.2.8. Teoremă ***(Lagrange).*** Dacă p este un număr prim, atunci

$a^{p-1} - 1 \equiv (a + 1)(a + 2) \dots (a + p - 1) \pmod p$

iar Leibniz enunță următoarea teoremă:

1.2.9. Teoremă ***(Leibniz)*** Dacă p este număr prim, atunci

$(p-2)! \equiv 1 \pmod p$

Este adevărată și reciproca teoremei lui Leibniz, adică un număr natural $n > 1$ este număr prim dacă și numai dacă

$(n-2)! \equiv 1 \pmod n$

Un alt rezultat privind congruențe cu numere prime este teorema următoare:

1.2.10. Teoremă *(L. Moser)*. Dacă p este număr prim, atunci

$(p-1)!a^p + a \equiv 0 \pmod{p}$

iar Sierpinski demonstrează că are loc:

1.2.11. Teoremă *(Sierpinski)*. Dacă p este număr prim, atunci

$a^p + (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$

Se observă că acest enunț unifică teoremele lui Fermat și Wilson.

În paragraful următor von defini o funcție L: Z x Z $\rightarrow$Z, cu ajutorul căreia vom putea demonstra rezultatele care unifică toate teoremele de mai sus.

1.3. Un punct de vedere unificator asupra unor teoreme de congruență din teoria numerelor

Să considerăm următoarele condiții pe care putem cere să le satisfacă un număr întreg $m \in Z$.

1) Vom spune că numărul $m \in Z$ satisface condiția (α_1) dacă:

$m = \pm p^\beta$ sau $m = \pm 2\, p^\beta$

cu p număr prim și $\beta \in N^*$

2) Vom spune că $m \in Z$ satisface condiția (α_2) dacă

$m = \pm 2^\alpha$

cu $\alpha \in \{0, 1, 2\}$

Fie acum mulțimea A definită prin

$A = \{m \in Z / m$ satisface (α_1) sau $(\alpha_2)\} \cup \{0\}$

Pentru un număr întreg m vom considera descompunerea în factori sub forma

$m = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$

cu $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ și desigur $\alpha_i \in N^*$, iar p_i sunt numere prime.

Definim funcția

$L: Z \times Z \to Z$

prin $L(x, m) = (x + C_1)(x + C_2) \ldots (x + C_{\varphi(m)})$

unde $C_1, C_2, \ldots C_{\varphi(m)}$ este un sistem redus de resturi modulo m (vezi definiția 1.1.3.).

1.3.1. Lemă. Fie n un întreg nenul oarecare și $\alpha \in N^*$. Atunci dacă

$C_1, C_2, \ldots C_{\varphi(n^\alpha)}$

este un sistem redus de resturi mod n^α, iar $k \in Z$ și $\beta \in N^*$, rezultă că

$k\, n^\beta + C_1, k\, n^\beta + C_2, \ldots, k\, n^\beta + C_{\varphi(n^\alpha)}$

este tot un sistem redus de resturi mod n^α.

Demonstrație. Este suficient să observăm că pentru $1 \le i \le \varphi(n^\alpha)$ avem

$(k\, n^\beta + C_i, n^\alpha) = 1$

1.3.2. Lemă. Dacă

$C_1, C_2, \ldots C_{\varphi(m)}$

este un sistem de resturi mod m, atunci din condițiile

(1) $p_i^{\alpha_i}$ divide pe m

(2) $p_i^{\alpha_i + 1}$ nu divide pe m

rezultă că

$C_1, C_2, \ldots C_{\varphi(m)}$

este un sistem redus de resturi modulo $p_i^{\alpha_i}$.

Demonstraţia este trivială.

1.3.3. Lemă. Dacă $(b, q) = 1$ şi

$C_1, C_2, \ldots, C_{\varphi(q)}$

este un sistem redus de resturi modulo q, atunci

$b + C_1, b + C_2, \ldots, b + C_{\varphi(q)}$

conţine un reprezentant al clasei $\hat{O} \pmod q$

Demonstraţie. Deoarece $(b, q-b) = 1$, rezultă că există i_0 astfel încît

$C_{i_0} \equiv q - b$

deci $b + C_{i_0} \equiv 0 \pmod q$

Obţinem atunci următorul rezultat:

1.3.4. Teoremă. Dacă $(x, m / (p_{i1}^{\alpha_{i1}} \ldots\ldots p_{is}^{\alpha_{is}})$ (Teorema 1 din lucrare), atunci $(x + C_1) \ldots\ldots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv 0 \pmod{m / (p_{i1}^{\alpha_{i1}} \ldots p_{is}^{\alpha_{is}})}$

Demonstraţie.

1.3.5. Teoremă (*Gauss*). Dacă $C_1, C_2, \ldots, C_{\varphi(m)}$ este un distem redus de resturi modulo m, atunci

(a) $m \in A \Rightarrow C_1 C_2 \ldots C_{\varphi(m)} \equiv -1 \pmod m$

(b) $m \notin A \Rightarrow C_1 C_2 \ldots C_{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Utilizînd această teoremă obţinem

1.3.6. Lemă. Avem

$C_1 C_2 \ldots C_{\varphi(m)} \equiv \pm 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$

pentru orice $i \in$?

Semnul în congruența precedentă fiind în concordanță cu condițiile $m \in A$, respectiv $m \notin A$.

1.3.7. Lemă. Dacă p_i este un divizor comun al lui x și m, atunci

(1) $m \in A \Rightarrow (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$

(2) $m \notin A \Rightarrow (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$

Demonstrație. Utilizînd lemele precedente, avem

$(x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} \equiv \pm 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$

Utilizînd lema 1.3.7., obținem

1.3.8. Teoremă Dacă $p_{i1}, p_{i2}, \dots\dots, p_{is}$ sunt toate numerele prime care divid simultan pe x și m, atunci

(1) $m \in A \Rightarrow (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv$

$\equiv -1 \pmod{p_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots p_{is}^{\alpha_{is}}}$

(2) $m \notin A \Rightarrow (x + C_1)(x + C_2) \dots (x + C_{\varphi(m)}) \equiv$

$\equiv\ 1 \pmod{p_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots p_{is}^{\alpha_{is}}}$

Notînd $d = p_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots p_{is}^{\alpha_{is}}$ și $m' = m/d$

din teoremele 1.3.4. și 1.3.8. rezultă

$L(x, m) \equiv \pm 1 + k_1 d = k_2 m'$

unde $k_1, k_2 \in Z$

Să observăm că deoarece avem $(d, m') = 1$, rezultă că ecuația

$k_2 m' - k_1 d = \pm 1$

cu necunoscutele k_1 și k_2 admite soluții întregi.

Se știe că dacă notăm k_1°, k_2° o soluție particulară a acestei ecuații, atunci

$k_1 = m't + k_1^\circ, k_2 = d't + k_2^\circ$ cu $t \in Z$

este soluția generală a ecuației și deci

$L(x, m) = \pm 1 + m' dt + k_1^\circ d \equiv \pm 1\ k_1^\circ \pmod{m}$

sau $L(x, m) \equiv k_2^{\circ} m' \pmod m$

Utilizînd aceste rezultate, obținem următoarele generalizări:

1.3.9. Teoremă ***(generalizarea teoremei lui Lagrange).*** Dacă $m \neq 0, \pm 4$, iar $x^2 + s^2 = 0$, atunci

$$x^{\varphi(m_s)+s} - x^s \equiv (x+1)(x+2)\dots(x+|m|-1) \pmod m$$

unde m_s și s se obțin din următorul algoritm:

$$(0)\quad \begin{cases} x = x_0 d_0 \\ m = m_0 d_0 \text{ cu } d_0 \neq 1 \text{ și } (x_0, m_0) = 1 \end{cases}$$

$$(1)\quad \begin{cases} d_0 = d_0' d_1 \\ m_0 = m_1 d_1 \text{ cu } d_1 \neq 1 \text{ și } (d_0', m_1) = 1 \end{cases}$$

....

$$(s-1)\quad \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}' d_{s-1} \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1} \text{ cu } d_{s-1} \neq 1 \text{ și } (d_{s-2}', m_{s-1}) = 1 \end{cases}$$

$$(s)\quad \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}' d_s \\ m_{s-1} = m_s d_s \text{ cu } d_s = 1 \text{ și } (d_{s-1}', m_s) = 1 \end{cases}$$

Demonstrație. Vezi F. Smarandache, „A generalization of Euler's theorem concerning congruences“, Bulet. Univ. Brașov, ser. C, vol. 23 (1981), pp. 7-12.

Din teorema precedentă, pentru un număr prim pozitiv rezultă $m_s = m$, $s = 0$ și $\varphi(m_s) = \varphi(m) = m-1$, deci obținem teorema lui Lagrange:

$$x^{m-1} - 1 \equiv (x+1)(x+2)\dots(x+m-1)$$

Funcția L și algoritmul prezentat mai sus permit și generalizarea teoremei lui Moser și a teoremei lui Sierpinski. Astfel, deoarece avem

(1) $m \in A \Rightarrow C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} a^{\varphi(m_s)+s} - L(o, m)\, a^s \equiv 0 \pmod m$

(2) $m \notin A \Rightarrow -L(o, m)\, a^{\varphi(m_s)+s} + C_1 C_2 \dots C_{\varphi(m)} a^s \equiv 0 \pmod m$

Mai general:

(3) $m \in A \Rightarrow (x+C_1)\ldots(x+C_{\varphi(m)})\, a^{\varphi(m_s)+s} - L(x, m)\, a^s \equiv 0 \pmod m$

(4) $m \notin A \Rightarrow -L(x, m)\, a^{\varphi(m_s)+s} + (x+C_1)\ldots(x+C_{\varphi(m)})a^s \equiv 0 \pmod m$

Din (1) pentru m număr prim, obţinem teorema lui Fermat. Din (1) sau (2), pentru m număr compus oarecare, obţinem teorema lui Euler.

1.4. Contribuţii la o conjectură a lui Carmichael

Conjectura la care ne referim este următoarea:

„Ecuaţia $\varphi(m) = x$ nu poate avea soluţie unică pentru nici un $n \in N$“, unde, desigur, φ este funcţia lui Euler.

În [G_3], R. K. Guy arată, studiind această conjectură Carmichael, că un număr natural n_0 care nu verifică conjectura trebuie să îndeplinească condiţia $n_0 > 10^{37}$.

Ordinul de mărime pentru un astfel de n_0 a fost apoi extins de către V.L. Kler, care a arătat [K_2] că trebuie să avem $n_0 > 10^{400}$ dacă n_0 nu satisface conjectura.

Amintim că în [M_1] se demonstrează pentru un n_0 care nu satisface conjectura că avem

$n_0 > 10^{10000}$

În cele ce urmează vom arăta că ecuaţia

$$\varphi(m) = n \qquad (1.4.1.)$$

admite un număr finit de soluţii şi vom da forma generală a acestora. De asemenea vom arăta că dacă x_0 este o soluţie unică a ecuaţiei (1.4.1.), pentru un n fixat, atunci

x_0 este multiplu al numărului $2^2 3^2 7^2 43^2$

Fie deci x_0 o soluşie a ecuaţiei (1.4.1.), pentru un n fixat. Vom construi cu ajutorul aceseia o altă soluţie $y_0 \neq x_0$. Pentru aceasta vom utiliza următoarele două metode:

Metoda 1. Descompunem pe x_0 sub forma $x_0 = ab$, cu a şi b întregi, având proprietatea $(a,b) = 1$. Dacă alegem $a' \neq a$ astfel încît

$\varphi(a') = \varphi(a)$ şi $(a', b) = 1$

va rezulta că $y_0 = a'b$ este o nouă soluţie a ecuaţiei.

Metoda 2. Să considerăm soluţia x_0 descompusă în factori primi

$$x_0 = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r} \qquad (1.4.2.)$$

unde $\beta_1 \in N^*$, iar $q_1, q_2, \dots, q_r$ sunt aşadar numere prime distincte.

Dacă găsim un întreg q avînd proprietăţile

1) $(q, x_0) = 1$

2) $\varphi(q)$ divide pe $\dfrac{x_0}{q_1, q_2, \dots, q_r}$

atunci $y_0 = \dfrac{x_0 q}{\varphi(q)}$ este o nouă soluţie a ecuaţiei.

Se observă imediat că alegerea q număr prim este neconvenabilă.

1.4.1. Lemă. Ecuaţia (1.4.1.) admite un număr finit de soluţii, oricare ar fi numărul $n \in N$.

Demonstraţie. Cazurile $n = 0$ şi $n = 1$ sunt banale. Fie deci $n \geq 2$ fixat şi fie

$p_1 < p_2 < \dots < p_s \leq n + 1$

şirul numerelor prime care nu depăşesc pe $n + 1$.

Dacă x_0 este o soluție a ecuației (1.4.1.), atunci x_0 se poate exprima cu ajutorul numerelor prime p_i sub forma

$$x_0 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$$

cu $\alpha_i \in N$.

Deoarece pentru orice $i = \overline{1, s}$ există $a_i \in N$ astfel încît $p_1^{\alpha_1} \geq n$, rezultă că $0 \leq \alpha_i \leq a_i + 1$ pentru orice i. Obținem deci o martine superioară pentru numărul soluțiilor ecuației. Acest număr nu poate depăși

$$\prod_{i=1}^{s} (a_i+2)$$

1.4.2. Lemă. Orice soluție a ecuației (1.4.1.) are forma (1) sau (2).

$$x_0 = n\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\varepsilon_1}\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\varepsilon_2}\dots\left(\frac{p_s}{p_s-1}\right)^{\varepsilon_s} \in Z$$

unde, pentru $i = \overline{1, s}$, avem

$\varepsilon_i = 0$ dacă $\alpha_i = 0$

$\varepsilon_i = 1$ dacă $\alpha_i \neq 0$

1.4.3. Lemă. Dacă x_0 este soluție unică pentru ecuația (1.4.1.), atunci x_0 este multiplu de $2^2\, 3^2\, 7^2\, 43^2$.

Demonstrație. Deoarece $\varphi(o) = \varphi(3)$ și $\varphi(1) = \varphi(2)$, putem presupune $x_0 \geq 4$.

Dacă 2 nu divide pe x_0, atunci $y_0 = 2\,x_0 \neq x_0$ este o altă soluție a ecuației, deoarece $\varphi(x_0) = \varphi(y_0)$.

Deci trebuie ca 2 să fie divizor al lui x_0.

Dacă 4 nu divide pe x_o, atunci $y_0 = x_0/2$ este o nouă soluție a ecuației. Rezultă că 4 este divizor al lui x_0.

Dacă 3 nu divide pe x_0, atunci 3 $x_0/2$ este o nouă soluţie a ecuaţiei, deci trebuie ca 3 să fie divizor al lui x_0. De asemenea, dacă 9 nu divide pe x_0 atunci $y_0 = 2x_0/3$ este o altă soluţie a ecuaţiei. Prin urmare 9 divide pe x_0.

Dacă 7 nu divide pe x_o, atunci $y_0 = 7\ x_0/6$ este o nouă soluţie a ecuaţiei, deci trebuie ca 7 să dividă pe x_0.

Dacă 7^2 nu divide pe x_o, atunci $y_0 = 6\ x_0/7$ este o nouă soluţie a ecuaţiei. Deci trebuie ca şi 49 să dividă pe x_0.

Acum, dacă 43 nu divide pe x_o, atunci $y_0 = 43x_0/42$ este o nouă soluţie a ecuaţiei, deci trebuie ca 43 să dividă pe x_0.

Dacă în plus 43^2 nu divide pe x_0, atunci $y_0 = 42x_0/43$ este o nouă soluţie a ecuaţiei. Deci 43^2 divide pe x_0 şi în concluzie de $2^2\,3^2\,7^2\,43^2$ divide pe x_0.

Rezultă că o soluţie unică a ecuaţiei (1.4.1) este de forma

$$x_0 = 2^{\gamma_1}\,3^{\gamma_2}\,7^{\gamma_3}43^{\gamma_4}\ t$$

cu $\gamma_i \geq 2$ şi $(t, 2{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}43) = 1$.

Deoarece $n_0 > 10^{10.000}$, rezultă că $x_0 > 10^{10.000}$.

Dacă $\gamma_1 > 3$ şi prin absurd 5 nu divide pe x_0, atunci $y_0 = 5\ x_0/4$ este o nouă soluţie a ecuaţiei. Prin urmare, 5 divide pe x_0.

Dacă 25 nu divide pe x_0, atunci $y_0 = 4x_0/5$ este o nouă soluţie a ecuaţiei. Prin urmare 25 divide pe x_0.

Vom construi acum prin recurenţă o mulţime M de numere prime având proprietatea că dacă M este infinită, atunci conjectura lui Carmichael este rezolvată.

Etapele de recurenţă sunt următoarele:

(a) numerele 2, 3, 5 aparţin lui M.

(b) dacă numerele prime distincte $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sunt din M, atunci numărul

$b_m = 1 + 2^m e_1 e_2 \ldots e_n$

este prim pentru m = 1 sau m = 2, şi vom considera că $b_m \in M$.

(c) Orice element aparţinînd lui M se obţine prin utilizarea, într-un număr finit de paşi, numai a regulilor (a) şi (b).

Dacă M este infinită, conjectura lui Carmichael este rezolvată.

Considerăm că mulţimea M este infinită.

De altfel se poate constata că din cele 168 de numere prime mai mici decât 1.000, doar 17 nu sunt în M. Acestea sunt:

101, 151, 197, 251, 401, 491, 503, 601, 607, 677, 701, 727, 751, 809, 883, 907, 983.

1.5. Funcţii prime

Să considerăm următoarele funcţii:

1) $P_1: N \to \{0, 1\}$

$$P_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă n este prim} \\ 1 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Exemple. $P_1(0) = P_1(1) = P_1(4) = P_1(6) = 1$, $P_1(2) = P_1(3) = P_1(5) = 0$

2) $P_2: N^2 \to \{0, 1\}$

$$P_2(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă m şi n sunt prime între ele} \\ 1 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

3) Mai general, $P_k: N^k \to \{0, 1\}$

$$P_k(n_1, n_2, \ldots n_k) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n_1, n_2, \ldots n_k \text{ sunt prime între ele} \\ 1 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

În continuare vom studia în ce condiții

$$P_k(n_1, n_2, \ldots n_k) = 0 \qquad (1.5.1.)$$

Vom da o condiție necesară și suficientă ca n numere prime două cîte două să fie simultan prime între ele.

Generalizăm teorema lui Popa [P_4], Cucurezeanu ([C_3], p. 165), Clement și Patrizio [P_5].

Următoarea lemă este evidentă.

1.5.1. Lemă. Dacă A și B sunt întregi nenegativi, atunci

$AB \equiv 0 \pmod{pB} \Leftrightarrow A \equiv 0 \pmod{p}$

1.5.3. Lemă. Fie a, b, p, q, numere întregi astfel încît

$(p, q) = (a, p) = (b, q) = 1$

Atunci

$A \equiv o \pmod{p}$ și $B \equiv o \pmod{q} \Leftrightarrow aAq + bBp \equiv 0 \pmod{pq} \Leftarrow aA + (bBp/q) \equiv 0 \pmod{p}$

Demonstrație. Pentru prima echivalență avem

$A = k_1p$, $B = k_2q$ cu $k_1, k_2 \in Z$

deci $aAq + bBp = (ak_1 + bk_2)\, pq$

Reciproc, din $aAq + bBp = kpq$ rezultă $aAq \equiv 0 \pmod{p}$ și $bBp \equiv o \pmod{q}$

și datorită ipotezei rezultă

$A \equiv o \pmod{p}$ și $B \equiv 0 \pmod{q}$

A două și a treia echivalență rezultă utilizînd lema 1.5.1.

1.5.3. Lemă Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt numere întregi prime două cînte dpuă, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere întregi avînt proprietatea

$(a_i, p_i) = 1$ pentru $i = \overline{1, n}$

Atunci, notînd $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ şi D fiind un divizor al lui P avem

$A_1 \equiv 0 \pmod{p_1}, A_2 \equiv 0 \pmod{p_2}, \ldots, A_n \equiv 0 \pmod{p_n}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i A_i)\left(\prod_{j \neq i} p_j\right) \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \ldots p_n} \Leftrightarrow$$

$$\left(P/D\right) \sum_{i=1}^{n} \left(a_i A_i / p_i\right) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} P/D\right) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i A_i / p_i\right)$$ este un întreg.

Demonstraţia acestei leme se face prin inducţie, utilizând lema precedentă.

Cu ajutorul acestei ultime leme obţinem următoarea teoremă generală

1.5.4. Teoremă. Fie p_{ij}, cu $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m_i}$, numere prime două cîte două şi fie $r_1, r_2, \ldots, r_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$, numere întregi, astfel încît

$(a_i, r_i) = 1$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Presupunem în plus că numerele $C_1, C_2, \ldots C_n$ îndeplinesc condiţia

(i) $p_{i1}, p_{i2}, \ldots p_{im_i}$ sunt sumultan prime $\Leftrightarrow C_i \equiv 0 \pmod{r_i}$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Atunci numerele p_{ij} cu $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m_i}$, sunt simultan prime dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia

$$\left(\frac{R}{D}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i c_i}{r_i}\right) \equiv 0 \left(\bmod \frac{R}{D}\right) \qquad (1.5.2.)$$

unde $R = r_1 r_2 \ldots r_n$, iar D este un divizor al lui R.

Demonstrație:

(Vezi F. Smarandache, "Characterization of n prime numbers simultaneously", in «Libertas Mathematica», Texas State University, Arlington, SUA, vol.XL (1991), pp. 151-155).

Observație. Dacă în condiția (i) din teoremă modulul r_i este înlocuit cu $\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}$ sau cu un divizor al său, concluzia (1.5.2) devine

$$\left(\frac{P}{D}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i c_i}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}}\right) \equiv 0 \left(\bmod \frac{P}{D}\right) \qquad (1.5.3.)$$

unde $P = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}$ și D este un divizor al lui P.

Desigur congruența (1.5.3) este echivalentă cu una din condițiile

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i \left(\frac{P}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}}\right) \equiv 0 \pmod{P} \qquad (1.5.4.)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i c_i}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}}\right) \text{ este număr întreg} \qquad (1.5.5)$$

Să observăm de asemenea că restricția impusă numerelor p_{ij} în teorema de mai sus de a fi prime între ele, este suficient de

convenabilă, deoarece dacă două dintre aceste numere nu sunt prime între ele, atunci cel puţin unul dintre ele nu este prim şi deci nici cele $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ numere nu sunt toate prime.

Putem obţine multe variante ale acestei teoreme, dînd parametrilor $a_1, a_2, \ldots a_n$ şi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ diverse valori.

Observaţii.

1) Dacă în teorema de mai sus luăm $m_i = 1$, iar c_i reprezintă teorema lui Simionov pentru orice i, atunci

2) Pentru $D = 1$, obţinem teorema lui V. Popa [P_4] care şi ea generalizează teorema lui I. Cucurezeanu [C_3], iar aceasta din urmă generalizează teorema lui Clement.

3) Pentru $D = P/p_2$ şi o alegere convenabilă a parametrilor a_i şi k_i rezultă teorema lui S. Patrizio.

Exemple.

1) Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ întregi pozitivi, primi doi cîte doi şi numerele k_i satisfăcînd condiţia $1 \le k_i \le p_i$, pentru orice i. Atunci $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt simultan prime dacă şi numai dacă este verificată una din condiţiile:

$$(T)\quad \sum_{i=1}^{n} \left[(p_i - k_i)!\,(k_i - 1)! - (-1)^{k}\right] \cdot \prod_{j \neq i} p_j \equiv 0 \pmod{p_1 \ldots p_n}$$

$$(U)\quad \left(\sum_{i=1}^{n} \left[(p_i - k_i)!\,(k_i - 1)! - (-1)^{k}\right] \cdot \prod_{j \neq i} p_j \right) \Big/ (p_{s+1} \cdots p_n) \equiv 0 \pmod{p_1 \ldots p_s}$$

$$(V)\quad \sum_{i=1}^{n} \left[(p_i - k_i)!\,(k_i - 1)! - (-1)^{k}\right] \cdot p_j / p_i \equiv 0 \pmod{p_j}$$

$$(W)\quad \sum_{i=1}^{n} \left[(p_i - k_i)!\,(k_i - 1)! - (-1)^{k}\right] \Big/ p_i \text{ este întreg.}$$

Capitolul 2

2.1. Baze de numerație generalizate

Se știe că dacă r este un număr natural strict mai mare decît unu, atunci orice număr natural n poate fi scris în baza de numerație r astfel:

$$n = C_m r^m + C_{m-1} + \dots + C_1 r + C_0 \qquad (2.1.1.)$$

unde $m \geq o$ este număr natural și C_i, pentru $i = \overline{0, m}$, sunt de asemenea numere naturale, cu proprietatea $0 \leq C_i \leq r-1$ pentru orice $i = \overline{0, m}$, iar $C_m \neq 0$.

Fiecărui număr din șirul 0, 1, 2,, ... , r–1 i se poate atribui un simbol care se numește cifră și atunci formula (2.1.1.) se poate scrie

$$n = \gamma_m \gamma_{m-1} \dots \gamma_1 \gamma_o (r)$$

unde γ_i este cifra care simbolizează numărul C_i..

Se știe că orice număr natural poate fi scris în mod unic într-o bază de numerație oarecare r, adică poate fi scris sub forma (2.1.1.), unde numerele C_i satisfac condițiile menționate mai sus.

Dacă notăm $a_i = r^i$ observăm că șirul $(a_i)_{i \in N}$ satisface relația de recurență

$$a_{i+1} = r\, a_i \qquad (2.1.3.)$$

și că (2.1.1) devine

$$n = C_m a_m + C_{m-1} a_{m-1} + \dots + C_1 a_1 + C_0 \qquad (2.1.4)$$

De aici ideea de a considera un şir strict crescător oarecare $(b_i)_{i\in N}$ şi se poate observa cu uşurinţă că orice număr nătural n poate fi scris în mod unic sub forma

$$n = C_h b_h + C_{h-1} b_{h-1} + \ldots + C_1 b_1 + C_o \qquad (2.1.5.)$$

dar condiţiile pe care le satisfac cifrele c_i nu mai sunt atît de simple ca în cazul bazei determinate de şirul cu termen general a_i.

Spre exemplu, şirul lui Fibonacci., determinat de condiţiile

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$$

poate fi considerat o bază de numeraţie generalizată. Această bază are marele avantaj (ca şi baza de numeraţie doi) că cifrele C_i pot lua doar valorile 0 şi 1, deoarece $b_i > b_{i+1}$.

Avantajul utilizării acestei baze generalizate este foarte mare în reprezentarea numerelor în calculatoarele electronice, deoarece, pe de-o parte, se folosesc tot două cifre ca şi în baza doi, iar pe de altă parte pentru memorarea unui număr este nevoie de o cantitate mai mică de memorie deoarece numărul cifrelor necesare pentru reprezentarea lui n în baza $(F_i)_{i\in N}$ este mai mic decît numărul cifrelor necesare pentru reprezentarea aceluiaşi n în baza $(2^i)_{i\in N}$.

O altă bază generalizată, care va fi utilizată în paragrafele următoare, este baza de numeraţie determinată de şirul

$$a_i(p) = (p^i - 1) / (p - 1) \qquad (2.1.6.)$$

unde p > 1 este un număr natural.

Să observăm că relaţia de recurenţă satisfăcută de acest şir:

$$a_{i+1}(p) = p\, a_i(p) + 1 \qquad (2.1.7.)$$

este totuşi destul de simplă, dar diferă de relaţia de recurenţă clasică (2.1.3.).

Bineînțeles că orice număr natural n poate fi scris în mod unic sub forma

$$n = C_m a_m + C_{m-1} a_{m-1} + \ldots + C_1 a_1 + a_0 \qquad (2.1.8.)$$

Pentru a determina condițiile pe care le îndeplinesc cifrele C_i în acest caz vom demonstra următoarea teoremă

2.1.1. Lemă. Pentru orice n, $p \in N^*$, $p \neq 1$, numărul n poate fi scris în mod unic sub forma

$$n = t_1 a_{n1}(p) + t_2 a_{n2}(p) + \ldots + t_e a_{ne}(p) \qquad (2.1.9.)$$

cu $n_1 > n_2 > \ldots > n_e > 0$ și

$1 \leq t_j \leq p-1$ pentru $j = \overline{1, e-1}$, iar

$$1 \leq t_e \leq p \qquad (2.1.10.)$$

Demonstrație. Din relația de recurență satisfăcută de șirul cu termen general $a_i(p)$ deducem:

$a_1(p) = 1$, $a_2(p) = 1+p$, $a_3(p) = 1 + p + p^2, \ldots$

deci $N^* = \bigcup_{i \in N^*} ([a_i(p), a_{i+1}(p)] \cap N^*)$

întrucît $[a_i(p), a_{i+1}(p)] \cap [a_{i+1}(p), a_{i+2}(p)] = \phi$

Pentru orice $n \in N^*$ există atunci un unic n_1 astfel încît $n \in [a_{n1}(p), a_{n1+1}(p)]$ și deci avem

$$n = \left[\frac{n}{a_n(p)}\right] a_{n_1}(p) + r_1$$

Notînd $t_1 = \left[\frac{n}{a_n(p)}\right]$ obținem

$n = t_1 a_n(p) + r_1$, cu $r_1 < a_{n_1}(p)$

Dacă $r_1 = 0$, din inegalitățile

$$a_{n1}(p) \leq n \leq a_{n1+1}(p) - 1 \qquad (2.1.11)$$

deducem $1 \le t_1 \le p$.

Dacă $r_1 \neq 0$, există un unic $n_2 \in N^*$, astfel încît

$R_1 \in [a_{n2}(p), a_{n2+1}(p)]$ și cum $a_{n1}(p) > r_1$, rezultă $n_1 > n_2$. De asemenea, din (2.1.11.) rezultă în acest caz $1 \le t_1 \le p - 1$, deoarece

$$t_1 \le \frac{a_{n_1+1} - r_1}{a_{n_1}(p)} < p$$

Obținem în continuare

$r_1 = t_2 a_{n2}(p) + r_2$

și continuînd procesul, după un număr finit de pași obținem:

$r_{e-1} = t_e a_{ne}(p) + r_e$ cu $r_e = 0$

și $n_e < n_{e-1}$, iar $1 \le t_e \le p$ și lema este demonstrată.

Să observăm că în (2.1.9), spre deosebire de 2.1.8.), toate cifrele t_i sunt semnificative (mai mari ca zero). Prin urmare, despre cifrele C_i din (2.1.8.) putem spune că ele sunt cuprinse între zero și p–1, cu excepția ultimei cifre semnificative, care poate fi și p.

De asemenea să observăm că diferența dintre relațiile de recurență (2.1.3.) și (2.1.7) induce mari diferențe de calcul în baza standard.

$(p) : 1, p, p^2, \ldots, p^i, \ldots$ (2.1.12.)

și baza generalizată

$[p] : a_1(p), a_2(p), \ldots, a_i(p), \ldots$ (2.1.13.)

Într-adevăr, așa cum se arată în $[A_1]$, dacă $m_{[5]} = 442$, $n_{[5]} = 412$, $r_{[5]} = 44$

atunci $m + n + r = 442 +$

412

44

---

d c b a

şi pentru a determina cifrele acestei sume, începem adunarea din coloana a doua, corespunzătoare lui $a_2(5)$. Avem

$4a_2(5) + a_2(5) + 4a_2(5) = 5a_2(5) + 4a_2(5)$

Acum, utilizând o unitate din prima coloană obţinem

$5a_2(5) + 4a_2(5) = a_3(5) + 4a_2(5)$

deci (deocamdată) b = 4. Continuînd, obţinem

$4a_3(5) + 4a_3(5) + a_3(5) = 5a_3(5) + 4a_3(5)$

şi utilizînd o nouă unitate din prima coloană, rezultă

$4a_3(5) + 4a_3(5) + a_2(5) = a_4(5) + 4a_3(5)$

deci C = 4 şi d = 1.

În sfîrşit, adunînd cifrele rămase

$4a_1(5) + 2a_1(5) = 5\,a_1(5) + a_1(5) = 5a_1(5) + 1 = a_2(5)$

rezultă că b trebuie să fie modificat, iar a = 0.

Deci $m+n+r = 1450_{[5]}$.

2.2. O nouă funcţie în teoria numerelor

În acest paragraf vm construi o funcţie $S: Z^* \to N$ avînd proprietăţile

(s1) $S(n)!$ este divizibil cu n

(s2) $S(n)$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea (p1).

Fie $p > 0$ un număr prim. Vom construi mai întîi funcţia

$Sp: N^* \to N^*$

astfel:

(a) $Sp(a_i(p)) = p^i$

(b) Dacă $n \in N^*$ este scris sub forma (2.1.9.) definim $Sp(n) = t_1Sp(a_1(p)) + t_2Sp(a_2(p)) + \ldots + t_eSp(a_e(p))$

2.2.1. Lemă. Pentru orice număr $n \in N^*$, exponentul la care apare numărul prim p în descompunerea lui n! în factori primi este mai mare sua egal cu n.

De asemenea amintim o formulă datorată lui Legendre care permite calculul exponentului la care apare numărul prim p în descompunerea în factori a numărului n!. Acest exponent este

$$e_p(n) = [n/p] + [n/p^2] + \ldots\ldots \qquad (2.2.1.)$$

Demonstraţie. Se ştie că notînd cu şxţ partea întreagă a numărui x avem:

$$\left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b}\right] \geq \left[\frac{a_1}{b}\right] + \left[\frac{a_2}{b}\right] + \ldots + \left[\frac{a_n}{b}\right]$$

pentru orice a_i, $b \in N^*$.

Atunci, dacă n are scrierea (2.1.9), obţinem

$$\left[\frac{t_1p^{n_1} + t_2p^{n_2} + \ldots + t_ep^{n_e}}{p}\right] \geq \left[\frac{t_1p^{n_1}}{p}\right] + \left[\frac{t_2p^{n_2}}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{t_ep^{n_e}}{p}\right] = t_1p^{n_1-1} + t_2p^{n_2-1} + \ldots + t_ep^{n_e-1}$$

....

$$\left[\frac{t_1p^{n_1} + t_2p^{n_2} + \ldots + t_ep^{n_e}}{p^{n_e}}\right] \geq \left[\frac{t_1p^{n_1}}{p^{n_e}}\right] + \left[\frac{t_2p^{n_2}}{p^{n_e}}\right] + \ldots + \left[\frac{t_ep^{n_e}}{p^{n_e}}\right] = t_1p^{n_1-n_e} + t_2p^{n_2-n_e} + \ldots + t_ep^0$$

....

$$\left[\frac{t_1p^{n_1} + t_2p^{n_2} + \ldots + t_ep^{n_e}}{p^{n_1}}\right] \geq \left[\frac{t_1p^{n_1}}{p^{n_1}}\right] + \left[\frac{t_2p^{n_2}}{p^{n_1}}\right] + \ldots + \left[\frac{t_ep^{n_e}}{p^{n_1}}\right] = t_1p^0 + \left[\frac{t_2p^{n_2}}{p^{n_1}}\right] + \ldots + \left[\frac{t_ep^{n_e}}{p^{n_1}}\right]$$

şi deci

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^{n_e}}\right] \geq$$

$$t_1\left(p^{n_1-1} + p^{n_1-2} + \ \ldots + p^0\right) + \ldots + t_e\left(p^{n_e-1} + p^{n_e-2} + \ \ldots + p^0\right) =$$
$$= t_1 a_{n_1}(p) + t_2 a_{n_2}(p) + \ldots + t_e a_{n_e}(p) = n$$

2.2.2. Teoremă. Funcţia Sp definită prin condiţiile s_3 şi s_4 de mai sus are proprietăţile

(1) Sp(n)! este multiplu de p^n

(2) Sp(n) este cel mai mic număr natural cu proprietatea (1)

Demonstraţie.. Proprietatea (1) rezultă din lema precedentă.

Pentru a demonstra pe (2), fie $n \in N^*$ oarecare şi $p \geq 2$ un număr prim. Să considerăm pe n scris sub forma (2.1.9) şi să notăm

$z = t_1 p^{n_1} + t_2 p^{n_2} + \ldots + t_e p^{n_e}$

Vom arăta că z este cel mai mic număr natural cu proprietatea (1).

Presupunând prin absurd că există $n \in N^*$, $u < z$, astfel încît u! este multiplu de p^n, atunci

$u < z \Rightarrow u \leq z-1 \Rightarrow (z-1)!$ este multiplu de p^n.

Dar

$z-1 = t_1 p^{n_1} + t_2 p^{n_2} + \ldots + t_e p^{n_e} - 1$

cu $n_1 > n_2 > \ldots > n_e \geq 1$ şi

$$\left[\frac{z-1}{p}\right] = t_1 p^{n_1-1} + t_2 p^{n_2-1} + \ldots + t_e p^{n_e-1} - 1$$

deoarece $[k + \alpha] = k + [\alpha]$ pentru orice k întreg şi $[-1/p] = -1$

În mod asemănător avem de exemplu

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_e}}\right] = t_1 p^{n_1-n_e} + \ldots + t_{e-1} p^{n_{e-1}-n_1} + t_e p^0 - 1$$

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_e+1}}\right] = t_1 p^{n_1-n_e-1} + \ldots + t_{e-1} p^{n_{e-1}-n_e-1} + \left[\frac{t_e p^{n_e} - 1}{p^{n_e+1}}\right] =$$

$$= t_1 p^{n_1-n_e-1} + \ldots + t_{e-1} p^{n_{e-1}-n_e-1}$$

deoarece

$0 < t_e p^{ne} - 1 \leq p \cdot p^{ne} - 1 < p^{ne+1}$

De asemenea

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_e-1}}\right] = t_1 p^{n_1-n_{e-1}} + \ldots + t_{e-1} p^0 + \left[\frac{t_e p^{n_e} - 1}{p^{n_{e-1}}}\right] = t_1 p^{n_1-n_{e-1}} + \ldots + t_{e-1} p^0$$

Ultima egalitate de acest fel care ne interesează este

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_1}}\right] = t_1 p^0 + \left[\frac{t_2 p^{n_2} + \ldots + t_e p^{n_e} - 1}{p^{n_1}}\right] = t_1 p^0$$

deoarece

$$0 < t_2 p^{n_2} + \ldots + t_e p^{n_e} \leq (p-1)\, p^{n_2} + \ldots + (p-1)p - p\, p^{n_e} - 1 \leq$$

$$\leq (p-1) \sum_{i=n_{e-1}}^{n_2} p^i + p^{n_e+1} - 1 \leq (p-1)\, \frac{p^{n_2+1}}{p-1} = p^{n_2+1} - 1 < p^{n_1} - 1 < p^{n_1}$$

Într-adevăr, pentru următoarea putere a lui p avem

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_1+1}}\right] = \left[\frac{t_1 p^{n_1} + t_2 p^{n_2} + \ldots + t_e p^{n_e}}{p^{n_1+1}}\right] = 0$$

deoarece $0 < t_1 p^{n1} + t_2 p^{n2} + \ldots + t_e p^{ne} - 1 < p^{n1+1} - 1 < p^{n1+1}$

Din aceste egalități deducem că exponentul lui p în descompunerea în factori a lui $(z-1)!$ este:

$$\left[\frac{z-1}{p}\right] + \left[\frac{z-1}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{z-1}{p^{n_1}}\right] = t_1\left(p^{n_1-1} + p^{n_1-2} + \ldots + p^0\right) + \ldots +$$

$$+ t_{e-1}\left(p^{n_{e-1}-1} + \ldots + p^0\right) + t_e\left(p^{n_e-1} + \ldots + p^0\right) - n_e = n - n_e < n - 1 < n$$

și contradicția obținută demonstrează teorema.

Acum putem construi funcția $S: N^* \to N^*$ avînd proprietățile (s1) și (s2), astfel:

(i) $S(\pm 1) = 1$

(ii) pentru orice $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ cu $\varepsilon = \pm 1$ și p_i numere prime, $p_i \neq p_j$ pentru $i \neq j$, iar $\alpha_i \geq 1$, definim

$S(n) = \max S_{p_i}(\alpha_i)$ (2.2.2.)

2.2.3. Teoremă. Funcția S definită prin condițiile (i) și (ii) de mai sus are proprietățile (s1) și (s2).

Demonstrație. Dacă $n = \pm 1$, $S(n)$ satisface condițiile (s1) și (s2).

Să presupunem că $n \neq \pm 1$ și să notăm cu Mx un multiplu de x, iar

$S_{p_{i0}}(\alpha_{i0}) = \max S_{p_i}(\alpha_i)$ (2.2.3.)

Avem $S_{p_{i0}}(\alpha_{i0})! = Mp_{i0}^{\alpha_{i0}}$ și deoarece

$S_{p_i}(\alpha_i)! = Mp_i^{\alpha_i}$, $i = \overline{1, s}$

rezultă

$S_{p_{i0}}(\alpha_{i0})! = Mp_i^{\alpha_i}$ pentru $i = \overline{1, s}$

În plus, deoarece $(p_i, p_j) = 1$, obținem

$S_{p_{i0}}(\alpha_{i0})! = Mp_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$

şi deci (s1) este demonstrată.

Pentru demonstrarea lui (s2) să observăm că deoarece $Sp_{i0}(\alpha_{i0})$ este cel mai mic număr natural k cu proprietatea $k! = Mp_{i0}^{\alpha_{i0}}$, rezultă că pentru orice $u < Sp_{i0}(\alpha_{i0})$ avem

$u! \neq Mp_{i0}^{\alpha_{i0}}$

deci

$u! \neq M(\varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}) = Mn$

Ceea ce demonstrează proprietatea (s2).

2.2.4. Propoziţie. Funcţiile Sp, cu p număr prim sunt crescătoare şi surjective, dar nu sunt injective. Funcţia $S: Z^* \rightarrow N^*$ este "în general crescătoare" în sensul că

$\forall n \, \exists k \quad S(k) \geq n$

de asemenea este surjectivă, dar nu este injectivă

Demonstraţie. Evidentă.

2.2.5. Consecinţe.

1. Pentru orice $n \in N^*$ avem

$Sp(\alpha) = S(p^{\alpha})$ (2.2.4.)

2. Pentru orice număr natural $n>4$ avem

n este prim $\Leftrightarrow S(n) = n$

Într-adevăr, dacă $n \geq 5$ este număr prim atunci

$S(n) = S_n(1) = n$

Reciproc, dacă $S(n) = n$, pentru $n > 4$ şi presupunem prin absurd că n nu este prim, adică

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$

cu $s \geq 2$ şi $\alpha_i \in N^*$ pentru $i = \overline{1, s}$, atunci fie $Sp_{i0}(\alpha_{i0})$ dat de (2.2.3.). Din formula lui Legendre (2.2.1.) deducem

$Sp_{i0}(\alpha_{i0}) < \alpha_{i0}\, p_{i0} < n$

ceea ce contrazice presupunerea făcută.

De asemenea, dacă $n = p^{\alpha}$, cu $\alpha \geq 2$, obținem

$S(n) = Sp(\alpha) \leq p\alpha < p^{\alpha} = n$

și teorema este demonstrată.

Exemplu. Dacă $n = \pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13}$, pentru calculul lui $S(n)$ ținem cont că

$$s(n) = \max \{S_2(31), S_3(27), S_7(13)\} \qquad (2.2.5.)$$

iar pentru a calcula pe $S_2(31)$ considerăm baza numerică generalizată

[2]: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

În această bază avem $31 = 1 \cdot a_5(2)$ deci $S_2(31) = 1 \cdot 2^5 = 32$

Pentru calculul lui $S_3(27)$ considerăm baza generalizată

[3]: 1, 4, 13, 40, ...

și avem $27 = 2 \cdot 13 + 1 = 2\, a_3(3) = a_1(3)$, deci

$S_3(27) = S_3(2a_3(3) + a_1(3)) = 2S_3(a_3(3)) + S_3(a_1(3)) =$

$= 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^1 = 57$

În sfîrșit, pentru a calcula pe $S_7(13)$ considerăm baza generalizată

[7]: 1, 8, 57, ...

și deducem $13 = 1 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = a_2(7) + 5a_1(7)$

deci $S_7(13) = 1 \cdot S_7(8) + 5S_7(1) = 1 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 = 84$

Din (2.2.5.) deducem $S(n) = 84$. Așadar, 84 este cel mai mic număr al cărui factorial este divizibil cu n.

2. Care sunt numerele ale căror catoriale se termină exact cu o mie de zerouri?

Pentru a răspunde la această întrebare observăm că pentru $n = 10^{1000}$ avem $S(n)! = M\ 10^{1000}$ și acest $S(n)$ este cel mai mic număr natural al cărui factorial se termină cu o sută de zerouri.

Avem $S(n) = S(2^{1000} \cdot 5^{1000}) = \max\{S_2(1000), S_5(1000)\} =$
$= S_5(1000)$

Considerăm baza numerică generalizată

[5]: 1, 6, 31, 156, 781, ...

Obținem $S_5(1000) = S_5(1 \cdot a_5(5) + 1 \cdot a_4(5) + 2 \cdot a_3(5) \quad 1 \cdot a_1(5)) =$ $5^5 + 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 5 = 4005$

Numerele 4006, 4007, 4008 și 4009 au și ele proprietatea cerută în enunț, dar 4010 are proprietatea că factorialul său are 1001 zerouri.

Să observăm că

$a_m(p) \leq \alpha \Leftrightarrow (p^m - 1)/(p-1) \leq \alpha \Leftrightarrow p^m \leq (p-1)\alpha + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m \leq \log_p((p-1)\alpha + 1)$

iar $\alpha_{[p]} = k_v a_v(p) + k_{v-1} a_{v-1}(p) + \ldots + k_1 a_1(p) = k_v k_{v-1} \ldots k_1 [p]$

este scrierea exponentului α în baza [p], atunci v e partea întreagă a lui $\log_p((p-1)\alpha+1)$, iar cifra k_v este obținută din egalitatea

$\alpha = k_v\, a_v(p) + r_{v-1}$

Procedînd analog cu r_{v-1} obținem indicele v-1 și pe k_{v-1} etc.

2.3. Formule de calcul pentru S(n)

Din proprietatea (b) pe care o satisface funcția Sp (§2.2.) deducem că

$S(p^\alpha) = p(\alpha_{[p]})_{(p)}$ (2.3.1.)

adică $S(p^\alpha)$ se obține înmulțind cu p numărul α scris în baza [p] și "citit" în baza (p).

Exemplu. Pentru calculul lui $S(11^{1000})$ procedăm astfel: ţinînd cont că baza [11] este

[11]: 1, 12, 133, 1464, ...

avem $1000 = 7{\cdot}133 + 5{\cdot}12 + 9 = 759_{[11]}$, deci

$S(11^{1000}) = 11(759)_{(11)} = 11\,(7{\cdot}11^2 + 5{\cdot}11 + 9) = 10021$

Prin urmare, 10021 este cel mai mic număr natural al cărui factorial este divizibil cu 11^{1000}.

Egalitatea (2.3.1.) earată importanţa bazelor (p) şi [p] în calculul lui S(n). Fie

$$\alpha_{(p)} = \sum_{i=0}^{n} C_i p^i$$

$$\alpha_{[p]} = \sum_{j=1}^{r} k_j a_j(p) = \sum_{j=1}^{r} k_j \frac{p^j - 1}{p - 1} \qquad (2.3.2.)$$

expresia exponentului α în cele două baze. Obţinem

$$(p-1)\,\alpha = \sum_{j=1}^{r} k_j p^j - \sum_{j=1}^{r} k_j$$

deci notînd

$$\sigma_{(p)}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} C_i \quad \sigma_{[p]}(\alpha) = \sum_{j=1}^{r} k_j \qquad (2.3.3.)$$

şi ţinînd cont că $\sum_{j=1}^{r} k_j p^j = p \sum_{j=0}^{r-1} k_j p^j$ este tocmai $p(\alpha_{[p]})_{(p)}$ obţinem

$$S(p^\alpha) = (p - 1)\,\alpha + \sigma_{[p]}(\alpha) \qquad (2.3.4.)$$

Cu ajutorul primei inegalităţi (2.3.3.) obţinem

$$p\alpha_{(p)} = \sum_{i=0}^{n} C_i\left(p^{i+1} - 1\right) + \sum_{i=0}^{n} C_i$$

sau

$$\frac{p}{p-1}\alpha = \sum_{i=0}^{n} C_i a_{i+1}(p) + \frac{1}{p-1}\sigma_{(p)}(\alpha)$$

și în consecință avem

$$\alpha = \frac{p-1}{p}\left(\alpha_{(p)}\right)_{[p]} + \frac{1}{p}\sigma_{(p)}(\alpha) \qquad (2.3.5.)$$

unde prin $(\alpha_{(p)})_{[p]}$ am notat numărul obținut scriind pe α în baza (p) și citindu-l în baza $[p]$.

Înlocuind această expresie a lui α în (2.3.4.), obținem

$$S\left(p^{a}\right) = \frac{(p-1)^2}{p}\left(\alpha_{(p)}\right)_{[p]} + \frac{p-1}{p}\sigma_{(p)}(\alpha) + \sigma_{[p]}(\alpha) \qquad (2.3.6.)$$

Putem obține și o legătură între $S(p^{\alpha})$ și exponentul $e_p(\alpha)$ din formula lui Legendre (2.2.1.). Amintim că $e_p(\alpha)$ este exponentul la care apare numărul prim p în descompunerea în factori a lui α!

Se știe că pe lîngă exprimarea (2.2.1) mai avem

$$e_p(a) = \frac{a - \sigma_{(p)}(\alpha)}{p-1} \qquad (2.3.7.)$$

deci utilizînd (2.3.5.) deducem

$$e_p(\alpha) = (\alpha_{(p)})_{[p]} - \alpha \qquad 2.3.8.$$

O altă formulă pentru $e_p(\alpha)$ poate fi obținută astfel: dacă α dat de prima egalitate (2.3.2.) este

$$\alpha_{(p)} = C_n p^n + C_{n-1}p^{n-1} + \ldots + C_1 p + C_0 \qquad (2.3.9)$$

atunci cum

$e_p(\alpha) = [\alpha/p] + [\alpha/p^2] + \dots + [\alpha/p^n] =$
$= (C_n p^{n-1} + C_{n-1} p^{n-2} + \dots C_1) + \dots + (C_n p + C_{n-1}) + C_n$
obținem

$$e_p(\alpha) = ((\alpha - C_0)_{(p)})_{[p]} = (([\alpha/p])_{(p)})_{[p]} \qquad (2.3.10)$$

unde $\alpha_{(p)} = C_n\, C_{n-1} \dots C_0$ este exprimarea lui α în baza (p).

Din (2.3.6.) și (2.3.8.) deducem

$$S(p^\alpha) = \frac{(p-1)^2}{p}\left(e_p(\alpha) + \alpha\right) + \frac{p-1}{p}\,\sigma_{(p)}(\alpha) + \sigma_{[p]}(\alpha) \qquad (2.3.11.)$$

Utilizînd egalitățile (2.3.1.) și (2.3.6.) obținem o legătură între numerele:

$(\alpha_{(p)})_{[p]}$ = numărul α scris în baza (p) și "citit" în baza $[p]$
$(\alpha_{[p]})_{(p)}$ = numărul α scris în baza $[p]$ și "citit" în baza (p)
și anume:

$$p^2(\alpha_{[p]})_{(p)} - (p-1)^2(\alpha_{(p)})_{[p]} = p\sigma_{[p]}(\alpha) + (p-1)\sigma_{(p)}(\alpha) \qquad (2.3.12.)$$

Pentru a obține și alte exprimări ale lui observăm că din formula lui Legendre (2.2.1.) rezultă

$$S(p^\alpha) = p\,(\alpha - i_p(\alpha)) \text{ cu } 0 \le i_p(\alpha) \le [(\alpha-1)/p] \qquad (2.3.13.)$$

de unde, utilizînd pentru $S(p^\alpha)$ notația echivalentă $S_p(\alpha)$, obținem

$$(1/p)S_p(\alpha) + i_p(\alpha) = \alpha \qquad (2.3.14.)$$

și deci pentru fiecare funcție S_p există o funcție i_p astfel încît să avem condiția binară (2.3.13.) pentru a obține identitatea.

Pentru a obține exprimări ale funcției i_p observăm că din (2.3.7.) rezultă $\alpha = (p-1)e_p(\alpha) + \sigma_{(p)}(\alpha)$, iar din (2.3.4.) obținem

$\alpha = (S_p(\alpha) - \sigma_{[p]}(\alpha))/(p-1)$, deci

$(p-1)e_p(\alpha) + \sigma_{(p)}(\alpha) = (S_p(\alpha) - \sigma_{[p]}(\alpha))/(p-1)$

sau $S(p^\alpha) = (p-1)^2 e_p(\alpha) + (p-1)\,\sigma_{(p)}(\alpha) + \sigma_{[p]}(\alpha)$ (2.3.15.)

Revenind la funcţia i_p, observăm că din (2.3.4.) şi (2.3.14.) rezultă

$i_p(\alpha) = (\alpha - \sigma_{[p]}(\alpha))/p$ (2.3.16.)

prin urmare putem spune că există o complementaritate între exprimarea lui $e_p(\alpha)$ prin egalitatea (2.3.7.) şi exprimarea de mai sus a lui $i_p(\alpha)$.

Putem găsi şi alte legături între i_p şi e_p. De exemplu din (2.3.7.) şi (2.3.16.) obţinem

$$i_p(\alpha) = \frac{(p-1)e_p(\alpha) + \sigma_{(p)}(\alpha) - \sigma_{[p]}(\alpha)}{p} \qquad (2.3.17.)$$

De asemenea, din $\alpha_{[p]} = \overline{k_v k_{v-1} \dots k_1} = k_v (p^{v-1} + p^{v-2} + \dots + 1) + k_{v-1}(p^{v-2} + p^{v-3} + \dots + 1) + \dots + k_2(p+1) + k_1$, obţinem

$\alpha = (k_v p^{v-1} + k_{v-1} p^{v-2} + \dots + k_2 p + k_1) + k_v(p^{v-2} + p^{v-3} + \dots + 1) + k_{v-1}(p^{v-3} + p^{v-4} + \dots + 1) + \dots + k_3(p+1) + k_2 = (\alpha_{[p]})_{(p)} + [\alpha/p] - [(v_{[p]}(\alpha))/p]$

deoarece

$[\alpha/p] = k_v(p^{v-2} + p^{v-3} + \dots + p + 1) + k_v/p + k_{v-1}(p^{v-3} + p^{v-4} + \dots + p + 1) + k_{v-1}/p + \dots + k_3(p+1) + k_3/p + k_2 + k_2/p + k_1/p$

iar $[n + x] = n + [x]$

Obtinem

$\alpha = (\alpha_{[p]})_{(p)} + [\alpha/p] - [\sigma_{[p]}(\alpha)/p]$ (2.3.18)

Rezultă că putem scrie

$S(p^{\alpha}) = p(\alpha - ([\alpha/p] - [\sigma_{[p]}(\alpha)/p]))$ (2.3.19)

iar din (2.3.16.) şi (2.3.19.) deducem

$i_p(\alpha) = [\alpha/p] - [\sigma_{[p]}(\alpha)/p]$ (2.3.20)

relaţie care se poate obţine şi direct, din (2.3.16.) ţinînd cont că dacă:

$(m-n)/p \in N$

atunci

$(m-n)/p = [m/p] - [n/p]$

prin urmare

$(\alpha - \sigma_{[p]}(\alpha))/p = [\alpha/p] - [\sigma_{[p]}(\alpha)/p]$

O altă exprimare a lui $i_p(\alpha)$ se obține din (2.3.1.) și (2.3.16.) sau din (2.3.18) și (2.3.20) și anume

$$i_p(\alpha) = \alpha - (\alpha_{[p]})_{(p)} \qquad (2.3.21.)$$

În sfîrșit, din definiția lui S rezultă

$S_p(e_p(\alpha)) = p[\alpha/p] = \alpha - \alpha_p$

unde α_p este restul împărțirii lui α la p, [i de asemenea

$$e_p(S_p(\alpha)) \geq \alpha, \ e_p(S_p(\alpha) - 1) < \alpha \qquad (2.3.22.)$$

deci

$$\frac{S_p(\alpha) - \sigma_{(p)}(S_p(\alpha))}{p-1} \geq \alpha$$

$$\frac{S_p(\alpha) - 1 - \sigma_{(p)}(S_p(\alpha) - 1)}{p-1} < \alpha$$

Utilizînd (2.3.4.) rezultă că $S_p(\alpha)$ este soluția unică a sistemului

$$\sigma_{(p)}(x) \leq \sigma_{[p]}(\alpha) \leq \sigma_{(p)}(x-1) + 1 \qquad (2.3.23.)$$

În fialul acestui paragraf vom reveni la funcția i_p pentru a prezenta o comportare asimptotică a ei.

Din condițiile pe care le îndeplinește această funcție în (2.3.13) rezultă că notînd

$\Delta(\alpha, p) = [(\alpha-1)/p] - i_p(\alpha)$

avem $\Delta \geq 0$.

Pentru a calcula pe Δ observam ca

$$[(\alpha-1)/p] - i_p(\alpha) = [(\alpha-1)/p] - [\alpha/p] + [\sigma_{[p]}(\alpha)/p] \qquad (2.3.24.)$$

și presupunînd $\alpha \in [hp+1, hp+p-1]$, rezulta

$[(\alpha-1)/p] = [\alpha/p]$

deci $\Delta(\alpha, p) = [(\alpha-1)/p] - i_p(\alpha) = [\sigma_{[p]}(\alpha)/p]$ (2.3.25)

De asemenea, dacă $\alpha = hp$, atunci

$[(\alpha-1)/p] = [(hp-1)/p] = h-1$

în timp ce $[\alpha/p] = h$, deci (2.3.24) devine

$\Delta(\alpha, p) = [\sigma_{[p]}(\alpha)/p] - 1$ (2.3.26)

Analog, dacă $\alpha = hp + p$, obținem

$[(\alpha-1)/p] = [h + 1 - (1/p)] = h$

iar $[\alpha/p] = h+1$, deci (2.3.24.) are forma (2.3.26). Pentru orice α pentru care $\Delta(\alpha, p)$ are forma (2.3.25.) sau (2.3.26.) deducem că $\Delta(\alpha, p)$ este maxim dacă $\sigma_{[p]}(\alpha)$ este maxim, deci pentru $\alpha = \alpha_M$, unde

$$\alpha_M = \underbrace{((p-1)(p-1) \ldots (p-1)\, p}_{v \text{ termeni}}\,[p]$$

Avem deci

$$\alpha_M = (p-1)a_v(p) + (p-1)a_{v-1}(p) + \ldots + (p-1)a_2(p) + p =$$
$$= (p-1)\,[(p^v-1)/(p-1) + (p^{v-1}-1)/(p-1) + \ldots + (p^2-1)/(p-1)] + p =$$
$$= (p^v + p^{v-1} + \ldots + p^2+p) - (v-1) = p\,a_v(p) - (v-1)$$

Rezultă că a_M nu este multiplu de p dacă și numai dacă $v-1$ nu este multiplu de p.

În acest caz

$$\sigma_{[p]}(\alpha_M) = (v-1)(p-1) + p = pv-v+1$$

și

$$\Delta(\alpha_M, p) = [\sigma_{[p]}(\alpha_M)/p] = [v - (v-1)/p] = v - [(v-1)/p]$$

Deci

$$i_p(\alpha_M) \geq [(\alpha_M-1)/p] - t$$

adica $i_p(\alpha_M) \in \big[[(\alpha_M-1)/p] - t,\ [(\alpha_M - 1)/p]\big]$.

Dacă $v-1 \in (hp, hp+p)$, obținem $[(v-1)/p] = h$ și

$h(p-1) + 1 < \Delta(\alpha_M) < h(p-1) + p + 1$

deci

$$\lim_{\alpha_M \to \infty} \Delta(\alpha_M, p) = \infty$$

Observăm de asemenea că

$[(\alpha_M-1)/p] = a_v(p) - [(v-1)/p] = (p^{v+1} - 1)/(p-1) - [(v-1)/p] \in$

$\in \left[(p^{hp+1} - 1)/(p-1) - h, (p^{hp+p+1} - 1)/(p-1) - h\right]$

Aşadar, dacă $\alpha_M \to \infty$ ca p^x, atunci $\Delta(\alpha_M, p) \to \infty$ ca x.

De asemenea din

$$\frac{i_p(\alpha_M)}{\left[\frac{\alpha_M - 1}{p}\right]} = \frac{a_v(p) - v}{a_v(p) - \left[\frac{v-2}{p}\right]} \to 1$$

rezultă

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{i_p(\alpha)}{\left[\frac{\alpha - 1}{p}\right]} = 1$$

2.4. Legături între funcţia S şi unele funcţii numerice clasice

În acest pragraf vom prezenta legături ale funcţiei S cu funcţia lui Euler, funcţia lui von Mangolt, funcţia lui Riemann, funcţia Π.

2.4.1. Definiţie. Funcţia lui von Mangolt se defineşte prin

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, \text{ dacă } n = p^m \\ 0, \text{ dacă } n \neq p^m \end{cases} \qquad (2.4.1.)$$

Se ştie că această funcţie nu este multiplicativă, adică din $(n, m) = 1$ nu rezultă $\Lambda(n.m) = \Lambda(n).\Lambda(m)$

De exemplu, pentru $n = 3$ şi $m= 5$ avem $\Lambda(n) = \ln 3$, $\Lambda(m) = \ln 5$ şi $\Lambda(m n) = \Lambda(15) = 0$

Despre această funcţie se cunosc următoarele rezultate:

2.4.2. Teoremă. Avem

$$\text{(i)} \quad \sum_{d/n} \Lambda(d) = \ln n$$

$$\text{(ii)} \quad \Lambda(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \ln \frac{n}{d}$$

unde μ este funcţia lui Möebius, definită prin

$$\Lambda(n) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n = 1 \\ 0, \text{ dacă } n \text{ este divizibil cu un pătrat} \\ (-1)^k, \text{ dacă } n = p_1 p_2 \cdots p_k \end{cases} \qquad (2.4.2.)$$

2.4.3. Definiţie. Funcţia ψ: R $\to$ R este definită prin relaţia

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \ln p \qquad (2.4.3)$$

Dintre proprietăţile acestei funcţii menţionăm doar două, de care avem nevoie în continuare, şi anume:

2.4.4. Teoremă. Funcţia ψ satisface

$$\text{(i)} \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

$$\text{(ii)} \quad \psi(x) = \ln[1, 2, 3, \ldots, [x]]$$

unde cu paranteză dreaptă am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor 1, 2, ... [x].

Se ştie că pe mulţimea N* putem considera două structuri laticeale şi anume

$\mathcal{N}_0 = (N^*, \wedge, \vee)$, $\mathcal{N}_d = (N^*, \overset{}{\underset{d}{\wedge}}, \overset{d}{\vee})$

unde $\wedge = \min$, $\vee = \max$

$\underset{d}{\wedge}$ = c.m.m.d.c. (notat pînă acum cu paranteze rotunde)

$\overset{d}{\vee}$ = c.m.m.d.c. (notat pînă acum nu paranteze drepte)

Ordinea indusă pe N* de structura $\mathcal{N}_0$ o vom nota cu ≤, iar ordinea indusă pe N* de structura $\mathcal{N}_d$ o notăm cu ≤d, se ştie că

$n_1 \leq d\ n_2 \Leftrightarrow n_1$ divide n_2 ($\Leftrightarrow n_1/n_2$) (2.4.4.)

În virtutea acestor consideraţii putem spune că funcţia S este definită pe laticea $\mathcal{N}_d$ cu valori în laticea $\mathcal{N}$.

Aceasta în virtutea proprietăţii

$S(n_1 \overset{d}{\vee} n_2) = S(n_1) \vee S(n_2)$ (2.4.5.)

pe care o are S.

În felul acesta S devine o funcţie monotonă, în sensul că

$n_1 \leq d\ n_2 \Rightarrow S(n_1) \leq S(n_2)$ (2.4.6.)

Se ştie [L_2] că dacă ($\mathcal{V}$, ∧, ∨) este o latice finită, $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ cu ordinea indusă ≤, atunci pentru orice funcţie f: V → R, funcţia generatoare ataşată este definită prin

$F(n) = \sum_{y \leq n} f(y)$ (2.4.7)

Acum putem reveni la funcţia lui Mangolt şi să observăm că notînd cu F^d funcţia generatoare ataşată funcţiei numerice f în laticea $\mathcal{N}_d$, şi cu F^0 funcţia generatoare ataşată lui f în laticea $\mathcal{N}_0$ în virtutea teoremei 2.4.2. avem pe de-o parte:

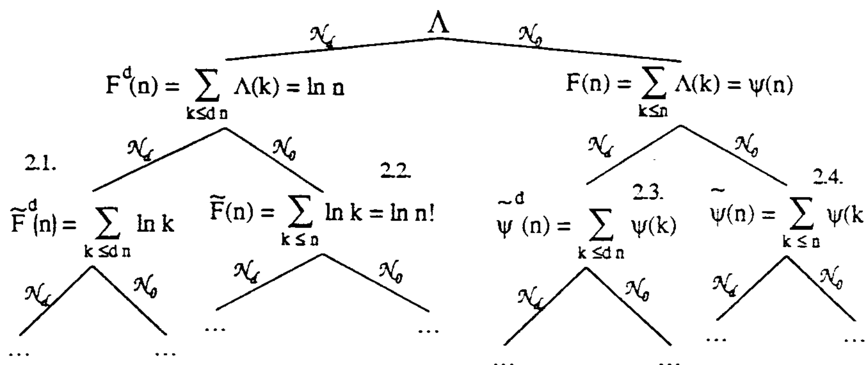
$F^d(n) = \sum_{k \leq dn} \Lambda(k) = \ln n$ (2.4.8.)

iar pe de altă parte se poate constata cu uşurinţă că funcţia generatoare ataşată aceleiaşi funcţii a lui Mangolt, însă în laticea $\mathcal{N}_0$ este

$$F^0(n) = \sum_{k \le n} \Lambda(k) = \psi(n) = \ln [1, 2, \ldots, n]$$

Observăm deci că fiecărei funcţii numerice f îi putem ataşa două funcţii generatoare şi anume funcţiile F^0 şi F^d.

Pe baza acestor consideraţii obţinem diagrama următoare:



Observăm de aici că definiţia lui S este într-o strînsă legătură cu egalităţile (1.1.) şi (2.2.).

Considerînd drept f funcţia lui Mangolt, din egalităţile

$[1, 2, \ldots, n] = e^{F(n)} = e^{f(1)} \cdot e^{f(2)} \cdot \ldots \cdot e^{f(n)} = e^{\psi(n)}$

$n! = e^{F(n)} = e^{F^d(1)} \cdot e^{F^d(2)} \cdot \ldots \cdot e^{F^d(n)}$

utilizînd şi definiţia funcţiei S, suntem conduşi la a considera funcţii numerice de forma

$\gamma(n) = \min \{m / n \leq_d [1, 2, \ldots, m]\}$ (2.4.9.)

asupra cărora vom reveni într-un paragraf care urmează. Revenind la ideea legăturii dintre funcţia S şi funcţii numerice clasice, pentru a prezenta o legătură dintre S şi funcţia lui Euler amintim că dacă p este un număr prim, atunci

$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ (2.4.10.)

iar pentru $\alpha \geq 2$ avem

$p^{\alpha-1} = (p-1)a_{\alpha-1}(p) + 1$ deci $\sigma_{[p]}(p^{\alpha-1}) = p$

Utilizînd egalitatea (2.3.4.) rezult

$S_p(p^{\alpha-1}) = (p-1)p^{\alpha-1} + \sigma_{[p]}(p^{\alpha-1}) = \varphi(p^\alpha) + p$ (2.4.11.)

2.4.5. Definiţie. Seria Dirichlet ataşată unei funcţii

$f: N^* \to C$

este

$$D_f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} \qquad (2.4.12.)$$

care pentru un anume $z = x + i y$ poate fi convergentă sau nu.

Cea mai simplă serie Diriclet este

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad (2.4.13.)$$

numită funcţia lui Riemann sau funcţia zeta, care este convergentă pentru Rez >1.

În cele ce urmează vom presupune că Z ∈ R, deci z = x.

2.4.6. Teoremă. Dacă

$$n = \prod_{i=1}^{t_n} p_i^{\alpha_{i_n}}$$

este descompunerea în factori primi a numărului natural n, atunci între funcţiile S_p şi funcţia lui Riemann avem următoarea legătură

$$\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{n\geq 1} \prod_{i=1}^{t_n} \frac{Sp_i\left(p_i^{\alpha_{i_n}-1}\right) - p_i}{p_i^{x\,\alpha_{i_n}}} \qquad (2.4.14.)$$

Demonstratie:

Se stie că seria Dirichet atasata functiei lui Mobius este

$$D_\gamma(z) = \frac{1}{\zeta(z)} \qquad \text{pentru} \quad Re(z)>1$$

iar seria Dirichet atasata functiei lui Euler este

$$D_\phi(z) = \frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} \qquad \text{pentru } Re(z)>2$$

Avem de asemenea

$$D_\xi(z) = \zeta^2(z) \qquad \text{pentru } Re(z)>1$$

unde $\xi(n)$ este numărul divizorilor lui n, inclusiv 1si n.
Mai general:

$$D\,\tau_k(n) = \zeta(z)*\zeta(z-k), \qquad \text{pentru } Re(z)>1,\ Re(z)>k-1$$

unde $\tau_k(n)$ este suma puterilor de ordinn k a divizorilor lui n
Vom nota $\tau(n)$ in loc de $\tau_1(n)$, iar $\tau_0(n)=\xi(n)$.

După cum am mai spus, între funcţiile φ şi ζ există legătura

$$\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^x} \qquad (2.4.15.)$$

În plus, avem

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{t_n} \varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{t_n} \left(Sp_i\left(p_i^{\alpha_{i_n}-1}\right) - p_i\right)$$

şi înlocuind această expresie a lui $\varphi(n)$ în (2.4.15.) obţinem egalitatea din enunţ.

Pentru funcţia S avem

$$D_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^x}$$

şi notînd cu $D_{F_S^d}$ seria Diriclet ataşată funcţiei următoare F_S^d deducem

2.4.6. Teoremă. Pentru orice $x > 2$ avem

(i) $\zeta(x) \le D_S(x) \le \zeta(x-1)$

(ii) $\zeta^2(x) \le D_{F_S^d}(x) \le \zeta(x) \cdot \zeta(x-1)$

Demonstraţie. (i) Inegalităţile rezultă din aceea că avem

$1 \le S(n) \le n$ (2.4.16.)

pentru orice $n \in N^*$

(ii) Avem

$$\zeta(x)\, D_S(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(k)}{k^x}\right) =$$

$$= S(1) + \frac{S(1)+S(2)}{2^x} + \frac{S(1)+S(3)}{3^x} + \frac{S(1)+S(2)+S(4)}{4^x} + \ldots = D_{F_S^d}(x)$$

şi inegalităţile rezultă utilizînd pe (i).

Să observăm că (ii) este echivalent cu

$D_\tau(x) \le D_{F_S^d}(x) \le D_\sigma(x)$

inegalitate care poate fi dedusă şi observînd că din (2.4.16.) se obţine

$$\sum_{k \le d\, n} 1 \le \sum_{k \le d\, n} S(k) \le \sum_{k \le d\, n} k$$

prin urmare avem

$\tau(n) \leq F_S{}^d(n) \leq \sigma(n)$ (2.4.17)

Remarcăm că în [G_S] s-a arătat că funcţia sumatoare $F_S{}^d$ satisface chiar inegalitatea

$\tau(n) \leq F_S{}^d(n) \leq n + 4$

Pentru aprezenta alte inegalităţi satisfăcute de seria Dirichlet D_S amintim mai întîi că dacă f şi g sunt două funcţii de o variabilă reală, cu creşteri nemărginite, dacă $f(x) > 0$ şi dacă există constantele C_1 şi C_2 astfel încît

$|f(x)| < C_1 f(x)$ pentru orice $x > C_2$

atunci scriem

$f(x) = O(g(x))$

(f este de ordinul lui g).

În mod special se notează cu $O(1)$ orice funcţie care rămîne mărginită pentru $x > C_2$. Dacă raportul $f(x)/g(x)$ tinde la zero pentru x tinzînd la infinit, notăm

$f(x) = o\,(g(x))$

În mod special se notează cu $o(1)$ orice funcţie care tinde la zero cînd x tinde la infinit.

Evident că

$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$

dar nu şi reciproc.

2.4.7. Teoremă. Funcţia lui Riemann satisface rumătoarele egalităţi:

(i) $\zeta(z) = 1/(z-1) + O(1)$

(ii) $\ln \zeta(z) = \ln(1/(z-1)) + O(z-1)$

(iii) $\zeta'(z) = -1/(z-1)^2 + O(1)$

pentru orice număr complex Z, unde prin $O(1)$ am notat o funcţie mărginită.

Utilizînd teoremele (2.4.6.) şi (2.4.7.) obţinem:

2.4.8. Teoremă. Seria Dirichlet D_S atașată funcției S și derivata sa D'_S satisfac inegalitățile:

(i) $1/(x-1) + O(1) \leq D_S(x) \leq 1/(x-2) + O(1)$

(ii) $-1/(x-1)^2 + O(1) \leq D'_S(x) \leq -1/(x-2)^2 + O(1)$

Notația consacrată pentru numărul numerelor prime mai mici decît x este $\Pi(x)$. În $[S_8]$ se dă o legătură între funcțiile Π și S.

Plecînd de la observația că $S(x) \leq n$ pentru orice n și că pentru $n > 4$ avem $S(n) = n$ dacă și numai dacă n este număr prim, se obține

$$\Pi(x) = \sum_{k=2}^{[x]} \left[\frac{S(k)}{k}\right] - 1$$

2.5. Funcția S ca funcție sumatoare

Fiind dată o funcție numerică, formula de inversiune a lui Möbius permite, după cum se știe, scrierea funcției f cu ajutorul funcției sumatoare F^d și anume

$$f(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\, F^d\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (2.5.1.)$$

dacă

$$F^d(n) = \sum_{d/n} f(d)$$

Avînd în vedere acest aspect, putem considera orice funcție numerică f în două situații:

1) în situația de a-i explicita funcția sumatoare F

2) în situația ca f să fie fonsiderată funcție sumatoare a unei funcții numerice g.

$$g(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\, f^d\left(\frac{n}{d}\right) \longleftarrow f \longrightarrow F^d(n) = \sum_{d/n} f(d) \qquad (2.5.2.)$$

De exemplu, pentru f(n) = n (aplicaţia identică) avem

$$g(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\frac{n}{d} = \varphi(n); \quad F^d(n) = \sum_{d/n} d = \sigma(d) \qquad (2.5.3.)$$

Considerînd cazul particular cînd f este funcţia S, explicitarea funcţiei sumatoare $F_S{}^d$ este dificilă în general deoarece

$$F_S^d(n) = \sum_{d/n} S(d) = \sum_{d/n} \max\left(S\left(\delta_i^{\beta_i}\right)\right) \qquad (2.5.4.)$$

cu δ_i factori primi ai lui d.

Totuşi, în două cazuri particulare exprimarea lui $F_S{}^d(n)$ este mai accesibilă, şi anume pentru $n = p^\alpha$ şi pentru n număr liber de pătrate. În primul caz avem

$$F\left(p^\alpha\right) = \sum_{j=1}^{\alpha} S\left(p^j\right) = \sum_{j=1}^{\alpha}\left((p-1)\,j + \sigma_{[p]}(j)\right) =$$

$$= (p-1)\frac{\alpha\,(\alpha+1)}{2} + \sum_{j=1}^{\alpha}\sigma_{[p]}(j) \qquad (2.5.5.)$$

Fie acum $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ un număr liber de pătrate, cu $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ numere prime. Desigur

$S(n) = p^k$ şi

$F_S{}^d(1) = S(1) = 1$

$F_S{}^d(p_1) = S(1) + S(p_1) = 1 + p_1$

$F_S{}^d(p_1 \cdot p_2) = S(1) + S(p_1) + S(p_2) + S(p_1 \cdot p_2) = 1 + p_1 + 2p_2$

$F_S{}^d(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = 1 + p_1 + 2\,p_2 + 2^3 p_3 = F(p_1 \cdot p_2) + 2^2 p_3$

şi rezultă

$F_S{}^d(n) = 1 + F_S{}^d(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}) + 2^{k-1} p_k$

de unde se obţine

$$F_S^d(n) = 1 + \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} p_i \qquad (2.5.8.)$$

Să observăm că deoarece $S(n) = p_k$, înlocuind valorile lui $F_S^d(t)$ date de (2.5.8.) în egalitate

$$S(n) = \sum_{r \cdot t = n} \mu(r) F_S^d(t) \qquad (2.5.9.)$$

aparent obținem o exprimare a lui p_k în funcție de numere prime precedente. În realitate (2.5.9.) este o identitate în care după reducerea termenilor asemenea coeficientul fiecărui număr prim este nul.

În [G_5] se rezolvă ecuația

$$F_S^d(n) = n \qquad (2.5.9.i)$$

în ipoteza

$$S(1) = 0 \qquad (2.5.9.ii)$$

2.5.1. Propoziție. În ipoteza 92.5.9.s) ecuația (2.5.9.i) are doar soluțiile

a) n număr prim

b) $n \in \{9, 16, 24\}$

Demonstrație. Deoarece

$$F_S^d(n) = \sum_{d/n} S(d) \qquad (2.5.9.\ iii)$$

în ipoteza făcută se observă că orice număr prim este soluție a ecuației. Să presupunem că

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$$

este descompunerea în factori primi a numărului compus $n \geq 4$, unde numerele prime p_i și exponenții $r_i \in N^*$ satisfac condițiile

(c1) $p_1 r_1 > p_i r_i$ pentru orice $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$

(c2) $p_i < p_{i+1}$ pentru $i \in \{2, 3, ..., k-1\}$, ori de cîte ori avem $k \geq 3$.

Să presupunem mai întîi $k = 1$ şi $r_1 \geq 2$. Datorită inegalităţii

$S(p_1^{s1}) \leq p_1 s_1$

observăm că avem

$$p_1^{r1} = n = F_S^d(n) = F_S^d(p_1^{r1}) = \sum_{s1=0}^{r1} S(p_1^{s1}) \leq \sum_{s1=0}^{r1} p_1 s_1 =$$

$$= p_1 r_1 (r_1 + 1)/2$$

deci

$2\, p_1^{r1-1} \leq r_1(r_1 + 1)$ dacă $r_1 \geq 2$ (2.5.9.iv)

Dacă $p_1 \geq 5$, această inegalitate nu este satisfacută pentru $r_1 \geq 2$, deci trebuie să avem $p_1 > 5$. Cu alte cuvinte, $p_1 \in \{2, 3\}$.

Cu ajutorul inegalităţii (2.5.9iv) putem găsi un supremum prentru r_1, supremum ce depinde de valorile lui p_1.

Dacă $p_1 = 2$, rezultă că r_1 poate lua doar valorile 2, 3, 4 şi pentru $p_1 = 3$ singura valoare posibilă a lui r_1 este 2.

Deci sunt cel mult patru soluţii ale ecuaţiei (2.5.9. i) dacă n este de forma $n = p_1^{r1}$, şi anume $n \in \{4, 8, 9, 16\}$.

Calculînd pe $F_S^d(n)$ în fiecare din aceste cazuri obţinem

$F_S^d(4) = 6$, $F_S^d(8) = 10$; $F_S^d(9) = 9$; $F_S^d(16) = 16$

În consecinţă, soluţii sunt $n = 9$ şi $n = 16$.

Să presupunem acum $k \geq 2$.

Scriind în ecuaţia (2.5.9. i) pe n descompus în factori primi, obţinem

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i} = F_S^d\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}\right) = \sum_{d/n} S(d) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} S\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{s_i}\right) =$$

$$= \sum_{s_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} \max\left\{S\left(p_1^{s_1}\right), S\left(p_2^{s_2}\right), \ldots, S\left(p_k^{s_k}\right)\right\}$$

$$\leq \sum_{s_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} \max\left\{p_1 s_1, p_2 s_2, \ldots, p_k s_k\right\} <$$

$$< \sum_{s_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} \max\left\{p_1 r_1, p_2 r_2, \ldots, p_k r_k\right\} =$$

$$= \sum_{s_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} p_1 r_1 \leq p_1 r_1 \prod_{i=1}^{k} (r_i + 1)$$

am obţinut deci inegalitatea

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{r_i}}{r_i + 1} < \frac{p_1 r_1 (r_1 + 1)}{p_1^{r_1}} = \frac{r_1 (r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \qquad (2.5.9.v)$$

Suntem astfel conduşi la studiul funcţiilor

$$f(x) = \frac{a^x}{x + 1} \quad \text{şi} \quad g(x) = \frac{x(x+1)}{b^{x-1}}, \; x \in [0, \infty), \text{ unde } a, b \geq 2$$

Derivatele acestor două funcţii sunt

$$f'(x) = \frac{a^x}{(x + 1)^2}\left[(x + 1) \ln a - 1\right] \quad \text{şi}$$

$$g'(x) = \frac{(-\ln b)x^2 + (2 - \ln b)\, x + 1}{b^{x - 1}}$$

Deoarece $(x+1) \ln a - 1 \geq (1+1) \ln 2 - 1 = 2 \ln 2 - 1 > 0$, rezultă

că $f'(x) > 0$ pentru $x \geq 1$.

În plus, maximul funcției se obține pentru

$$x = \max\left\{1, \frac{2 - \ln b + \sqrt{(\ln b)^2 + 4}}{2 \ln b}\right\}$$

Notînd

$$\hat{x} = \frac{2 - \ln b + \sqrt{(\ln b)^2 + 4}}{2 \ln b}$$

deducem

$$\sqrt{(\ln b)^2 + 4} < \ln b + 2 \quad \text{pentru } b \geq 2$$

de unde rezultă

$$\hat{x} < \frac{(2 - \ln b)(2 + \ln b)}{2 \ln b} = \frac{2}{\ln b} \leq \frac{2}{\ln 2} < 3$$

Să observăm că avem și

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

Rezultă că

$$\frac{p_1^{r_1}}{r_1 + 1} \text{ crește, pentru } r_1 \in N^*, \text{ de la } \frac{p_1}{2} \text{ la } \infty$$

și în plus

$$\frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \max\left\{2, \frac{6}{p_1}, \frac{12}{p_1^2}\right\} = \max\left\{2, \frac{6}{p_1}\right\} \leq 3$$

deoarece

$$\frac{6}{p_1} \geq \frac{12}{p_1^2} \qquad \text{dacă} \quad p_1 \geq 2$$

Utilizînd relația (2.5.9.v) obținem

$$\prod_{i=2}^{k} \frac{p_1}{2} \leq \prod_{i=2}^{k} \frac{p_i^{r_i}}{r_i + 1} < \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{2^{r_1 - 1}} \leq 3 \qquad (2.5.9.vi)$$

pentru orice $r_1 \in N^*$.

Reținem deci că

$$\prod_{i=2}^{k} \frac{p_i}{2} < 3$$

Dar avem şi

$$\prod_{i=2}^{4} \frac{p_i}{2} \geq \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4} > 3$$

de unde rezultă că trebuie să avem $k \leq 3$.

Pentru $k = 2$, din (2.5.9.v) şi (2.5.9.vi) deducem

$$\frac{p_2^{r_2}}{r_2 + 1} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \quad \text{şi} \quad \frac{p_2}{2} < 3$$

deci $p_2 < 6$.

Dacă presupunem că $r_2 \geq 3$, deducem

$p_1 \cdot p_2 \geq 2 \cdot 3 = 6$, adică $p_2 > 6/p_1$.

şi obţinem

$$\frac{p_2^3}{4} \leq \frac{p_2^{r_2}}{r_2 + 1} < \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \max\left\{2, \frac{6}{p_1}\right\} \leq \max\{2, p_2\} = p_2$$

deci $p_2^2 < 4$, ceea ce este o contradicţie.

Aşadar, avem $r_2 \leq 2$. Deci

$p_2 \in \{2, 3, 5\}$, $r_2 \in \{1, 2\}$

Mai mult, din

$$1 \leq \frac{p_2}{2} \leq \frac{p_2^{r_2}}{r_2 + 1} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} \leq \frac{r_1(r_1 + 1)}{2^{r_1 - 1}}$$

rezultă $r_1 \leq 6$.

În consecinţă, fixînd valorile lui p_2 şi r_2 inegalităţile

$$\frac{r_1(r_1 + 1)}{p_1^{r_1 - 1}} > \frac{p_2^{r_2}}{r_2 + 1} \qquad \text{şi } p_1 r_1 > p_2 r_2$$

ne dau suficiente informații pentru a determina un supremum pentru r_1 (mai mic decît șapte) pentru fiecare valoare a lui p_1.

Rezultatele sunt date în tabelul următor.

p_2	r_2	p_1	r_1	$n=p_1^{r1}p_2^{r2}$	$F_S^d(n)$	Dacă $F_S^d(n)=n$, atunci
2	1	3	$1 \le r_1 \le 3$	$2 \bullet 3^{r1}$	$2+3r_1(r_1+1)$	$3 \mid 2$
2	1	5	$1 \le r_1 \le 2$	$2 \bullet 5^{r1}$	$2+5r_1(r_1+1)$	$3 \mid 2$
2	1	$p_1 \ge 7$	1	$2\ p_1$	$2+2\ p_1$	$0=2$
2	2	3	2	36	34	$34=36$
2	2	$p_1 \ge 5$	1	$4\ p_1$	$3\ p_1+6$	$p_1=6$
3	1	2	$2 \le r_1 \le 5$	$3 \bullet 2^{r1}$	$2r_1^2-2r_1+12$	$r_1=3$
3	1	$p_1 \ge 5$	1	$3\ p_1$	$2\ p+3$	$p_1=3$
3	1	2	3	40	30	$30=40$

Din acest tabel deducem că trebuie să avem

$n = 3 \cdot 2^{r1}$ sau $r_1 = 3$

deci $n = 3 \cdot 2^3 = 24$, adică $n = 24$ este singura soluție a ecuației (2.5.9.i) pentru $k = 2$.

În sfîrșit, să presupunem $k = 3$; atunci deoarece

$(p_2/2)(p_2/2) < 3$

rezultă $p_2 \cdot p_3 < 12$, deci $p_2 = 2$ și $p_3 \in \{3, 5\}$.

Deoarece

$$\frac{r_1(r_1+1)}{p_1^{r_1-1}} \le \frac{r_1(r_1+1)}{3^{r_1-1}} \le 2 \qquad (2.5.9.vii)$$

utilizînd (2.5.9.vi) obținem $p_2 = 3$.

De asemenea din (2.5.9.vi) și (2.5.9.vii) obținem

$$\frac{2^{r_2}}{r_2+1} \bullet \frac{3^{r_3}}{r_3+1} < 2$$

şi deoarece membrul stîng al acestei inegalităţi este un produs de două funcţii strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deducem că singurele valori posibile pentru r_2 şi r_3 sunt $r_2 = r_3 = 1$.

Introducînd aceste valori în (2.5.5.v) obţinem

$$\frac{3}{2} < \frac{r_1(r_1+1)}{p_1^{r_1-1}} \le \frac{r_1(r_1+1)}{5^{r_1-1}}$$

de unde rezultă $r_1 = 1$.

În consecinţă, ecuaţia (2.5.9.i) este satisfăcută dacă şi numai dacă $n = 2 \cdot 3 \cdot p_1 = 6p_1$

Dar

$$6\,p_1 = F_S^d(6\,p_1) = S(1) + S(2) + S(3) + S(6) + \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} S\left(2^i 3^j p_1\right) =$$

$$= 8 + \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} \max\left\{S\left(2^i 3^j\right), S(p_1)\right\} = 8 + \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} \max\left\{S\left(2^i 3^j\right), p_1\right\} = 8 + 4\,p_1$$

deoarece $S(2^i \cdot 3^j) \le 3 < p_1$ pentru $i, j \in \{0, 1\}$ şi deci $p_1 = 4$, ceea ce contrazice presupunerea $p_1 \ge 5$.

Rezultă că ecuaţia avută în vedere nu are soluţii pentru $k = 3$ şi propoziţia este demonstrată.

Consecinţă. Soluţiile inegalităţii

$F_S^d(n) > n$ (2.5.9.viii)

se obţin ţinînd cont de faptul că (2.5.9.viii) implică (2.5.9.v)

Deci

$F_S^d(n) > \Leftrightarrow n \in \{8, 12, 18, 20\}$ sau $n = 2p$, cu p număr prim.

În consecinţă, avem

$F_S^d(n) \leq n + 4$ pentru orice $n \in N^*$.

Mai mult, întrucît avem soluţiile inecuaţiei

$F_S^d(n) \geq n$

putem deduce şi soluţiile inecuaţiei $F_S^d(n) < n$.

Amintim că în [S_9] se studiază limita şirului

$$T(n) = 1 - \ln F_S^d(n) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_S^d\left(p_i^k\right)}$$

ce conţine funcţia sumatoare. Se demonstrează că

$$\lim_{n \to \infty} T(n) = -\infty$$

În continuarea acestui paragraf vom avea în vedere săgeata spre stînga din (2.5.2.), adică vom privi pe S ca o funcţie sumatoare a unei funcţii s, pe care o vom determina.

Avem deci, prin definiţie,

$$s(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\, S\left(\frac{n}{d}\right)$$

Dacă descompunerea lui n în factori primi este

$$n = p_1^{\alpha_1} \bullet p_2^{\alpha_2} \bullet \ldots \bullet p_t^{\alpha_t}$$

rezultă că

$$s(n) = \sum_{p_{i1} p_{i2} \cdots p_{ir}} (-1)^r S\left(\frac{n}{p_{i1} p_{i2} \cdots p_{ir}}\right)$$

Să considerăm că

$$S(n) = \max S\left(p_i^{\alpha_i}\right) = S\left(p_{i_0}^{\alpha_i}\right) \qquad (2.5.10.)$$

Distingem următoarele cazuri:

(a1) $S\left(p_{i_0}^{\alpha_{i_0}-1}\right) \geq S\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ pentru $i \neq i_0$.

În acest caz observăm că divizorii d ai lui n pentru care $\mu(d) \neq 0$ sunt de forma d = 1 sau $d = p_{i1}p_{i2}\dots p_{ir}$. Un divizor de forma a doua poate să conțină pe p_{i0} sau nu, deci utilizînd (2.5.10) rezultă

$$s(n) = S\left(p_{i0}^{\alpha_{i0}}\right)\left(1 - C_{t-1}^1 + C_{t-1}^2 + \dots + (-1)^{t-1} C_{t-1}^{t-1}\right) + S\left(p_{i0}^{\alpha_{i0}}\right)\left(-1 + C_{t-1}^1 - C_{t-1}^2 + \dots + (-1) C_{t-1}^{t-1}\right)$$

de unde rezultă că s(n) = 0 pentru $t \geq 2$ sau dacă $S\left(p_{i0}^{\alpha_{i0}}\right) = S\left(p_{i0}^{\alpha_{i0}-1}\right)$ și $s(n) = p_{i0}$ în celelalte cazuri.

(a2) dacă există j_0 astfel încît

$$S\left(p_{i0}^{\alpha_{i0}-1}\right) < S\left(p_{j0}^{\alpha_{j0}}\right) \text{ si } S\left(p_{j0}^{\alpha_{j0}-1}\right) \geq S\left(p_i^{\alpha_i}\right) \text{ pentru } i \neq i_0, j_0$$

În acest caz, presupunînd în plus că

$$S\left(p_{j0}^{\alpha_{j0}}\right) = \max\left\{S\left(p_j^{\alpha_j}\right) / S\left(p_{i0}^{\alpha_{i0}-1}\right) < S\left(p_j^{\alpha_j}\right)\right\}$$

obtinem

$$s(n) = S\left(p_{i0}^{\alpha_{i0}}\right)\left(1 - C_{t-1}^1 + C_{t-1}^2 + \dots + (-1)^{t-1} C_{t-1}^{t-1}\right) +$$
$$+ S\left(p_{j0}^{\alpha_{j0}}\right)\left(-1 + C_{t-2}^1 - C_{t-2}^2 + \dots + (-1)^{t-1} C_{t-2}^{t-2}\right) +$$
$$+ S\left(p_{j0}^{\alpha_{j0}-1}\right)\left(1 - C_{t-2}^1 + C_{t-2}^2 + \dots + (-1)^{t-2} C_{t-2}^{t-2}\right)$$

deci s(n) = 0 daca $t \geq 3$ sau daca $S\left(p_{j0}^{\alpha_{j0}-1}\right) = S\left(p_{j0}^{\alpha_{j0}}\right)$ si $S(n) = -p_{j0}$ in celelalte cazuri.

În consecință, observăm că pentru a obține pe s(n) construim, după modelul de mai sus, un șir maximal $i_1, i_2, \dots, i_k$ astfel încît

$$s(n) = S\left(p_{i1}^{\alpha_{i1}}\right),\ S\left(p_{i1}^{\alpha_{i1}-1}\right) < S\left(p_{i2}^{\alpha_{i2}}\right),\ \dots,\ S\left(p_{ik-1}^{\alpha_{ik-1}-1}\right) < S\left(p_{ik}^{\alpha_{ik}}\right)$$

s(n) = 0 dacă $t \geq k + 1$ sau $S\left(p_{ik}^{\alpha_{ik}}\right) < S\left(p_{ik}^{\alpha_{ik}-1}\right)$

$s(n) = (-1)^{k+1} p_{ik}$ în celelalte cazuri.

Deoarece pentru o egalitate de forma $S(p^{\alpha}) = S(p^{\alpha-1})$ avem

$S(p^{\alpha}) = S(p^{\alpha-1}) \Leftrightarrow (p-1)\alpha + \sigma_{[p]}(\alpha) = (p-1)(\alpha-1) = \sigma_{[p]}(\alpha-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma_{[p]}(\alpha-1) - \sigma_{[p]}(\alpha) = p-1$

iar $S(p^{\alpha}) \neq S(p^{\alpha-1}) \Leftrightarrow \sigma_{[p]}(\alpha-1) - \sigma_{[p]}(\alpha) = -1$, notînd deducem că avem

$$s(n) = \begin{cases} 0, \text{ daca } t \geq k+1 \text{ sau } \sigma_{[p]}(\alpha_k - 1) - \sigma_{[p]}(\alpha_k) = p_k - 1 \\ (-1)^{k+1} p_k, \text{ in celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Aplicație. Se știe [L_2] că dacă $(\mathcal{V}, \Lambda, V)$ este o latice finită cu $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ și notăm cu $\leq$ ordinea indusă pe V, iar pentru funcția f: $\mathcal{V} \to R$ considerăm funcția generatoare, definită prin egalitatea (2.4.7.), atunci dacă notăm

$g_{ij} = F(x_i \Lambda x_j)$

rezultă

$\det(g_{ij}) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$

În [L_2] se arată că acest rezultat poate fi generalizat la o mulțime parțial ordonată, definind

$$g_{ij} = \sum_{\substack{x \leq x_i \\ x \leq x_j}} f(x)$$

Utilizînd aceste rezultate și notînd

$\Delta(r) = \det(S(i \underset{d}{\Lambda} j))$ pentru $i, j = \overline{1, r}$

rezultă că

$\Delta(r) = s(1) \cdot s(2) \cdot \ldots \cdot s(r)$

deci pentru r suficient de mare (de fapt pentru $r \geq 8$) avem $\Delta(r) = 0$. Mai mult, pentru orice n există r, suficient de mare, astfel încît dacă

$\Delta(n, k) = \det S((n+i) \wedge_d (n+j))$, pentru $i, j = \overline{1, k}$

să avem $\Delta(n, k) = 0$ pentru $k \geq r$. Aceasta deoarece

$$\Delta(n, k) = \prod_{i=1}^{k} s(n+i)$$

Avînd în vedere seria Dirichlet D_s atașată funcției s prin egalitatea

$$D_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^x}$$

avem

(i) $1 \leq D_s(x) \leq D_\varphi(x)$ pentru $x > 2$

(ii) $1 \leq D_s(x) \leq \frac{x-1}{e^A(x-2)}$, a fiind o constanta pozitiva.

Demonstrație. (i) Utilizînd regula de înmulțire a seriilor Dirichlet obținem

$$\frac{1}{\zeta(x)} D_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^x}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(k)}{k^x}\right) =$$

$$= \mu(1)\,S(1) + \frac{\mu(1)\,S(2) + \mu(2)\,S(1)}{2^x} + \frac{\mu(1)\,S(3) + \mu(3)\,S(1)}{3^x} + \frac{\mu(1)\,S(4) + \mu(2)\,S(2) + \mu(4)\,S(1)}{4^x} + \ldots\ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s(k)}{k^x} = D_s(x)$$

și afirmația rezultă ținînd cont de inegalitățile (i) din teorema 2.4.6.

Inegalitățile (ii) rezultă ținînd cont de teorema 2.4.7.

Capitolul 3

Generalizări ale funcției S

3.1. Prelungirea funcției S la mulțimea Q a numerelor raționale

Pentru a obține această prelungire vom defini mai întîi o duală a funcției S.

În $[D_2]$ și $[D_4]$ este pus în evidență un principiu de dualitate cu ajutorul căruia plecînd de la o latice dată pe intervalul unitate, să se obțină alte latici pe același interval.

Rezultatele au fost folosite pentru a propune o variantă de spații bitopologice și pentru a introduce un nou punct de vedere pentru studiul mulțimilor fuzzy.

În $[D_3]$ metoda de a obține noi latici pe intervalul unitate este generalizată la o latice oarecare.

În cele ce urmează vom adopta o metodă din $[D_3]$ pentru a construi toate funcțiile legate într-un anume sens prin dualitate cu funcția Smarandache.

Să observăm că dacă notăm:

$R_d(n) = \{m / n \leq_d m!\}$ $\quad L_d(n) = \{m / m! \leq_d n\}$

$R(n) = \{m / n \leq m!\}$ $\quad L(n) = \{m / m! \leq n\}$

putem spune că funcția S este definită de tripletul $(\Lambda, \in, R_d)$, deoarece

$S(n) = \Lambda \{m / m \in R_d(n)\}$

Putem cita toate funcţiile definite cu ajutorul unui triplet (a, b, c), unde

a este unul dintre simbolurile V, Λ, $\overset{d}{V}$ şi $\underset{d}{\Lambda}$

b este unul dintre simbolurile $\in$ şi $\notin$

c este una dintre mulţimile $R_d(n)$, $L_d(n)$, $R(n)$ şi $L(n)$ definite mai sus.

Nu toate aceste funcţii sunt netriviale. După cum am văzut, tripletul $(\Lambda, \in, R_d)$ defineşte funcţia $S_1(n) = S(n)$, dar tripletul $(\Lambda, \in, L_d)$ defineşte funcţia

$S_2(n) = \Lambda \{m / m! \leq_d n\}$

care este identic egală cu unu.

Multe dintre funcţiile obţinute prin această metodă sunt funcţii în scară. De exemplu, dacă motăm cu S_3 funcţia definită de tirpletul $(\Lambda, \in, R)$, avem

$S_3(n) = \Lambda \{m / n \leq m!\}$

Deci $S_3(n) = m$ dacă şi numai dacă

$n \in [(m-1)! + 1, m!]$

În cele ce urmează vom acorda o atenţie specială funcţiei S_4 definită de tripletul $(V, \in, L_d)$.

Avem

$$S_4(n) = V \{m / m! \leq_d n\} \qquad (3.1.1.)$$

care este, într-un anume sens, duala funcţiei S.

3.1.1. Propoziţie. Funcţia S_4 satisface

$$S_4(n_1 \underset{d}{\Lambda} n_2) = S_4(n_1) \Lambda S_4(n_2) \qquad (3.1.2.)$$

deci este un morfism de la $(N^*, \underset{d}{\Lambda})$ la (N^*, Λ).

Demonstraţie. Dacă $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ este şirul numerelor prime şi

$n_1 = \Pi\, p_i^{\alpha i} \quad n_2 = \Pi\, p_i^{\beta i}$, $\alpha_i, \beta_i \in N$

doar un număr finit dintre exponenții α_i și β_i fiind nenuli, obținem

$n_1 \underset{d}{\Lambda} n_2 = \Pi\, p_i^{\min(\alpha i, \beta i)}$

Dacă notăm

$S_4(n_1 \underset{d}{\Lambda} n_2) = m$, $S_4(n_i) = m_i$, $i = 1,2$

și presupunem $m_1 \leq m_2$, rezultă că membrul drept din (3.1.2) este $m_1 \Lambda m_2$.

Din definiția lui S_4 rezultă că exponentul $e_{pi}(m)$ la care apare numărul prim p_i în descompunerea în factori alui $m!$ satisface inegalitatea

$e_{pi}(m) \leq \min(\alpha_i, \beta_i)$, $i \geq 1$

și eixstă j astfel încît

$e_{pj}(m+1) > \min(\alpha_j, \beta_j)$.

Atunci rezultă că

$\alpha_i \geq e_{pi}(m)$, $\beta_i \geq e_{pi}(m)$, $i \geq 1$

Avem de asemenea

$e_{pi}(m_1) \leq \alpha_i$, $e_{pi}(m_2) \leq \alpha_i$

și în plus există h și k astfel încît

$e_{ph}(m_1 + 1) > \alpha_h$, $e_{pk}(m_2 + 1) > \alpha_k$

Atunci

$\min(\alpha_i, \beta_i) \geq \min(e_{pi}(m_1), e_{pi}(m_2)) = e_{pi}(m_1)$

deoarece $m_1 \leq m_2$

Rezultă că $m_1 \leq m$. Dacă presupunem că inegalitatea este strictă, rezultă $m! \leq n_1$, deci există h astfel încît $e_{ph}(m) > \alpha_h$ și avem contradicția $e_{ph}(m) > \min(\alpha_h, \beta_h)$

și propoziția este demonstrată.

Observăm că foarte multe dintre valorile lui S_4 sunt egale cu unu. De exemplu:

$S_4(2n + 1) = 1$

și $S_4(n) > 1$ dacă și numai dacă n este număr par.

3.1.2. Propoziție. Fie $p_1, p_2, \ldots p_i$ șirul numerelor prime consecutive și

$n = p_1^{\alpha 1} \bullet p_1^{\alpha 2} \bullet \ldots \bullet p_k^{\alpha k} \bullet q_1^{\beta 1} \bullet q_2^{\beta 2} \bullet \ldots \bullet q_r^{\beta r}$

descompunerea numărului $n \in N^*$ în factori primi astfel încît prima parte a descompunerii conține (eventualele) numere prime consecutive și fie

$$t_i = \begin{cases} S(p_i^{\alpha i}) - 1 \text{ dacă } e_{pi}(S(p_i^{\alpha i})) > \alpha_i \\ S(p_i^{\alpha i}) + p_i - 1 \text{ dacă } e_{pi}(S(p_i^{\alpha i})) = \alpha_i \end{cases} \quad (3.1.3.)$$

Atunci

$$S_4(n) = \min \{t_1, t_2, \ldots, t_k, p_{k+1} - 1\} \quad (3.1.4.)$$

Demonstrație. Dacă $e_{pi}(S(p_i^{\alpha i})) > \alpha_i$, din definiția funcției S rezultă că $S(p_i^{\alpha i}) - 1$ este cel mai mare întreg pozitiv m cu proprietatea $e_{pi}(m) \leq \alpha_i$. De asemenea, dacă $e_{pi}(S(p_i^{\alpha i})) = \alpha_i$, atunci $S(p_i^{\alpha i}) + p_i - 1$ este cel mai mare întreg m cu proprietatea $e_{pi}(m) = \alpha_i$.

Rezultă că numărul $\min \{t_1, t_2, \ldots, t_k, p_{k+1} - 1\}$ este cel mai mare întreg pozitiv m pentru care $e_{pi}(m!) \leq \alpha_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, k$.

3.1.3. Propoziție. Funcția S_4 satisface

$S_4(n_1 + n_2) \wedge S_4(n_1 \overset{d}{\vee} n_2) = S_4(n_1) \wedge S_4(n_2)$

pentru orice $n_1, n_2 \in N^*$.

Demonstrație. Afirmația rezultă utilizînd egalitatea (3.1.2.), ținînd cont de faptul că

$(n_1 + n_2) \underset{d}{\wedge} (n_1 \overset{d}{\vee} n_2) = n_1 \underset{d}{\wedge} n_2$

Înainte de a prelungi funcția S la mulțimea Q a numerelor raționale vom pune în evidență unele proprietăți de morfism pentru alte funcții definite prin triplete (a, b, c).

3.1.4. Propoziție.

(i) Funcția S_5: $N^* \to N^*$,

$S_5(n) = \overset{d}{\vee}\{m / m! \leq_d n\}$

satisface

$$S_5(n_1 \hat{d} n_2) = S_5(n_1) \hat{d} S_5(n_2) = S_5(n_1) \wedge S_5(n_2) \qquad (3.1.5.)$$

(ii) Funcția S_6: $N^* \to N^*$,

$S_6(n) = \overset{d}{\vee}\{m / n \leq_d m!\}$

satisface

$$S_6(n_1 \overset{d}{\vee} n_2) = S_6(n_1) \overset{d}{\vee} S_6(n_2) \qquad (3.1.6.)$$

(iii) Funcția S_7: $N^* \to N^*$,

$S_7(n) = \overset{d}{\vee}\{m / m! \leq_d n\}$

satisface

$$S_7(n_1 \wedge n_2) = S_7(n_1) \wedge S_7(n_2) \qquad (3.1.7.)$$

$$S_7(n_1 \vee n_2) = S_7(n_1) \vee S_7(n_2) \qquad (3.1.7.)$$

Demonstrație.

(i) fie

$A = \{a_i / a_i! \leq_d n_1\}$; $B = \{b_j / b_j! \leq_d n_2\}$

$C = \{C_k / C_k! \leq_d n_1 \hat{d} n_2\}$

Atunci avem $A \subset B$ sau $B \subset A$. Într-adevăr, fie

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_h\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$

astfel încît $a_i < a_{i+1}$ și $b_j < b_{j+1}$.

Atunci dacă $a_h \leq b_r$, rezultă că $a_i \leq b_r$ pentru $i = \overline{1, h}$, deci $a_i! \leq_d b_r! \leq_d n_2$.

Prin urmare $A \subset B$.

Analog, dacă $b_r \leq a_h$, rezultă $B \subset A$.

Desigur, avem $C = A \cap B$, deci dacă $A \subset B$ rezultă

$S_5(n_1 \wedge_d n_2) = \overset{d}{\vee} C_k = \overset{d}{\vee} a_i = S_5(n_1) = \min \{S_5(n_1), S_5(n_2)\} = S_5(n_1) \wedge_d S_5(n_2)$

Considerînd S_5 definită pe $\mathcal{N}_d$ din (2.7.5.) rezultă că această funcție este monotonă. Dar nu este pe laticea $\mathcal{N}_0$, deoarece

$m! < m! + 1$ dar $S_5(m!) = [1, 2, \ldots, m]$ și $S_5(m!+1) = 1$

(ii) Să observăm că

$S_6(n) = \overset{d}{\vee} \{m / \exists\, i \in 1, t$ astfel ca $e_{pi}(m) < \alpha_i\}$

Dacă notăm $a = \vee \{m / n \leq_d m!\}$ atunci

$n \leq_d (a+1)!$ și $a+1 = \wedge \{m / n \leq_d m!\} = S(n)$

deci $S_6(n) = [1, 2, \ldots, S(n) - 1]$

Atunci avem

$S_6(n_1 \overset{d}{\vee} n_2) = = [1, 2, \ldots, S(n_1 \overset{d}{\vee} n_2) - 1] =$

$= [1, 2, \ldots, S(n_1) \vee S(n_2) - 1]$

și

$S_6(n_1) \vee^d S_6(n_2) = [[1, 2, \ldots, S_6(n_1) - 1], [1, 2, \ldots, S_6(n_2) - 1]] =$

$= [1, 2, \ldots, S_6(n_1) \vee S_6(n_2) - 1]$

(iii) Egalitățile rezultă din faptul că

$S_7(n) = [1, 2, \ldots, m] \Leftrightarrow n \in [m!, (m+1)! - 1]$

Acum vom extinde funcția S la mulțimea numerelor raționale.

Orice număr rațional pozitiv poate fi descompus în factori primi sub forma

$$a = \prod_p p^{\alpha_p} \qquad (3.1.8.)$$

cu $\alpha_p \in Z$ și doar un număr finit dintre acești exponenți sunt nenuli.

Avînd în vedere această scriere se dă definiția divzibilității numerelor raționale în felul următor:

3.1.5. Definiție. Numărul rațional $a=\prod p^{\alpha_p}$ divide numărul rațional $b=\prod p^{\beta_p}$ dacă $\alpha_p \le \beta_p$.

Datorită egalității (3.1.8.) înmulțirea numerelor raționale se reduce la adunarea exponenților acestor numere. În consecință, problemele în legătură cu divizibilitatea numerelor raționale se reduc la probleme de ordine între exponenți.

Cel mai mare divizor comun d și cel mai mic multiplu comun e se definesc [H_2] prin

$$d=(a,\ b,\ \ldots)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\ \beta_p \ldots)}$$
$$e=[a,\ b,\ \ldots)=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\ \beta_p \ldots)} \qquad (3.1.9.)$$

Mai mult, între cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al unor numere raționale nenule există relația

$$[a,\ b,\ \ldots\ ]=\frac{1}{\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\ldots\right)} \qquad (3.1.10.)$$

Desigur, orice număr rațional pozitiv a poate fi scris sub forma $a = n/n_1$ cu $n \in N$, $n_1 \in N^*$, $(n, n_1) = 1$.

3.1.6. Definiție. Prelungirea $S: Q_+^* \to Q_+^*$ a funcției Smarandache este

$$S(n/n_1) = S_1(n) / S_4(n_1) \qquad (3.1.11.)$$

O consecință a acestei definiții este aceea că dacă n_1 și n_2 sunt întregi pozitivi, atunci

$$S\left(\frac{1}{n_1} \vee \frac{1}{n_2}\right)=S\left(\frac{1}{n_1}\right) \vee S\left(\frac{1}{n_2}\right) \qquad (3.1.12.)$$

Într-adevăr

$$S\left(\frac{1}{n_1} V \frac{1}{n_2}\right) = S\left(\frac{1}{n_1 \Lambda n_2}\right) = \frac{1}{S_4(n_1 \Lambda n_2)} = \frac{1}{S_4(n_1) \Lambda S_4(n_2)} =$$

$$= \frac{1}{S_4(n_1)} V \frac{1}{S_4(n_2)} = S\left(\frac{1}{n_1}\right) V S\left(\frac{1}{n_2}\right)$$

În general

$$S\left(\frac{n}{n_1} V \frac{m}{m_1}\right) = (S(n) \, V \, S(m)) \cdot \left(S\left(\frac{1}{n_1}\right) V S\left(\frac{1}{m_1}\right)\right) \qquad (3.1.13.)$$

formulă care generalizează egalitatea (2.2.2.)

3.1.7. Definiție. Funcția $\tilde{S}$: $Q_+^* \rightarrow Q_+^*$ definită prin

$$\tilde{S}(a) = \frac{1}{S\left(\frac{1}{a}\right)}$$

se numește duala funcției S.

3.1.8. Propoziție. Duala $\tilde{S}$ a funcției S satisface

(i) $\tilde{S}(n_1 \Lambda n_2) = \tilde{S}(n_1) \Lambda \tilde{S}(n_2)$

(ii) $\tilde{S}\left(\frac{1}{n_1} \Lambda \frac{1}{n_2}\right) = \tilde{S}\left(\frac{1}{n_1}\right) \Lambda \tilde{S}\left(\frac{1}{n_2}\right)$

pentru orice n_1 și n_2.

Mai mult, avem și

$$\tilde{S}\left(\frac{n}{n_1} \Lambda \frac{m}{m_1}\right) = \left(\tilde{S}(n) \Lambda \tilde{S}(m)\right) \cdot \left(\tilde{S}\left(\frac{1}{n_1}\right) \Lambda \tilde{S}\left(\frac{1}{m_1}\right)\right)$$

Demonstrația este evidentă.

Observații. 1) Restricția funcției $\tilde{S}$ la mulțimea întregilor pozitivi coincide cu funcția S_4.

2) Prelungirea funcției $S: Q_+^* \to Q_+^*$ la mulțimea tuturor numerelor raționale nenule se poate face prin egalitatea

$S(-a) = S(a)$

pentru orice $a \in Q_+^*$

3.2. Funcții numerice inspirate din definiția funcției Smarandache

În acest paragraf vom utiliza egalitatea (3.1.1.) și relația (2.4.9.) pentru a defini prin analogie alte funcții numerice.

Să observăm că putem spune că $n!$ este produsul tuturor numerelor întregi pozitive ce nu depășesc pe n, în laticea $\mathcal{L}$. Analog, produsul q_m al tuturor divizorilor lui m, incluzînd pe unu și m, este produsul tuturor întregilor pozitivi ce nu depășesc pe m în laticea $\mathcal{L}_d$. Deci putem considera funcții de forma

$\theta(n) = \Lambda \{m / n \leq_d q(m)\}$

Se știe că dacă

$m = p_1^{x1} \bullet p_2^{x2} \bullet \dots \bullet p_t^{xt}$

este descompunerea în factori a numărului m, atunci produsul tuturor divizorilor lui m este

$$q(m)\sqrt{m^{\tau(m)}} \qquad (3.2.1.)$$

unde $\tau(m) = (x_1+1)(x_2+1) \dots (x_t+1)$ este numărul divizorilor lui m.

Dacă n are descompunerea $n = p_1^{\alpha 1} \bullet p_2^{\alpha 2} \bullet \dots \bullet p_t^{\alpha t}$ (3.1.5.)

inegalitatea $n \leq_d q(m)$ este echivalentă cu

$$q_1(x) \equiv x_1(x_1+1) \dots (x_t+1) - 2\alpha_1 \geq 0$$
$$q_2(x) \equiv x_2(x_2+1) \dots (x_t+1) -2\alpha_2 \geq 0$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad (3.2.2.)$$
$$q_t(x) \equiv x_t (x_t+1) \dots (x_t+1) -2\alpha_t \geq 0$$

Deci $\theta(n)$ poate fi dedus rezolvand problema de programare neliniară

$$(\min)\ f(x) = p_1^{x1} \bullet p_2^{x2} \bullet \dots \bullet p_t^{xt} \qquad (3.2.3.)$$

cu restricțiile (3.2.2.)

Soluția acestei probleme poate fi obținută aplicînd de exemplu algoritmul SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Techniques) datorat lui Fiacco și McCormick [F_1].

Exemple. 1) Pentru $n = 3^4 \bullet 5^{12}$, relațiile (3.2.2.) și (3.2.3.) devin

$(\min)\ f(x) = 3^{x1} \bullet 5^{x2}$ cu restricțiile

$$\begin{cases} x_1(x_1+1)(x_2+1) \geq 8 \\ x_2(x_1+1)(x_2+1) \geq 24 \end{cases}$$

Utilizînd algoritmul SUMT, considerăm funcția

$$U(x, n) = f(x) - r \sum_{i=1}^{t} \ln q_i(x)$$

și sistemul

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \qquad (3.2.4.)$$

În [F_1] se arată că dacă soluția $x_1(r)$, $x_2(r)$ a acestui sistem nu poate fi explicitată din sistem, putem face pe r să tindă la zero. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} x_1(x_1+1)(x_2+1) = 8 \\ x_2(x_1+1)(x_2+1) = 24 \end{cases}$$

și are soluția $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Deci avem

$\min \{m / 3^4 \cdot 5^{12} \leq q(m)\} = m_0 = 3 \cdot 5^3$

Într-adevăr, $q(m_0)\sqrt{m_0^{\tau(m_0)}} = m_0^4 = 3^4 \cdot 5^{12} = n$

2) pentru $n = 3^2 \cdot 5^7$, din sistemul (3.2.4.) rezultă pentru x_2 ecuația

$2x_2^3 + 9x_2^2 + 7x_2 - 98 = 0$

cu o soluție reală în intervalul (2, 3). Rezultă $x_1 \in (4/7, 5/7)$.

Considerînd $x_1 = 1$, observăm că pentru $x_2 = 2$ perechea $(x_1, x_2$ nu este o soluție admisibilă a problemei, dar $x_2 = 3$ dă $\theta(3^2 \cdot 5^7) = 3^4 \cdot 5^{12}$

3) În general, pentru $n = p_1^{x1} \cdot p_2^{x2}$ din sistemul (3.2.4.) rezultă ecuația

$\alpha_1 x_2^3 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2^2 + \alpha_2 x_2 - 2\alpha_2^2 = 0$

cu soluția dată de formul lui Cartan.

Desigur, utilizînd "metoda tripletelor" putem atașa și funcției θ multe alte funcții.

Pentru funcția ν dată de (2.4.9.) se pot de asemenea atașa funcțiile generate prin metoda tripletelor.

În cele ce urmează vom studia analogul funcției Smarandache și duala ei în acest al doilea caz.

3.2.1. Propoziție. Dacă n are descompunerea (3.2.1. i) atunci

(i) $\nu(n) = \max_{i=\overline{1,t}} p_i^{\alpha i}$.

(ii) $\nu(n_1 \overset{d}{\vee} n_2) = \nu(n_1) \vee \nu(n_2)$

Demonstrație. (i) Fie

$p_n^{\alpha n} = \max p_i^{\alpha i}$

atunci $p_i^{\alpha i} \leq p_n^{\alpha n}$ pentru $i = \overline{1, t}$, deci

$p_i^{\alpha i} \leq_d [1, 2, \ldots, p_n^{\alpha n}]$

Dar $(p_i^{\alpha i}, p_j^{\alpha j}) = 1$ pentru $i \neq j$ şi deci

$n \leq_d [1, 2, \ldots, p_n^{\alpha n}]$

Dacă pentru un anume m cu proprietatea $m \leq p_n^{\alpha n}$ am avea $n \leq_d [1, 2, \ldots, m]$, ar rezulta contradictia $p_n^{\alpha n} \leq_d [1, 2, \ldots, m]$.

(ii) Daca

$n_1 = \Pi p^{\alpha p}, n_2 = \Pi p^{\beta p}$

atunci

$n_1 \overset{d}{\vee} n_2 = \Pi p^{\max(\alpha p, \beta p)}$

deci

$\nu(n_1 \overset{d}{\vee} n_2) = \max p^{\max(\alpha p, \beta p)} = \max(\max p^{\alpha p}, \max p^{\beta p})$

si propozitia este demonstrata

Desigur putem spune că funcţia $\nu_1 = \nu$ este definită de tripletul $(\Lambda, \in, \mathcal{R}_{[d]})$, unde

$R_{[d]} = \{m / n \leq_d [1, 2, \ldots, m]\}$

Duala sa, în sensul avut în vedere în paragraful precedent este funcţia definită de tripletul $(V, \in, \mathcal{L}_{[d]})$. Să notăm cu ν_4 această funcţie

$\nu_4(n) = V \{m / [1, 2, \ldots, m] \leq_d n]$

Rezultă că $\nu_4(n)$ este cel mai mare întreg pozitiv cu proprietatea că toţi întregii pozitivi $m \leq \nu_4(n)$ divid pe n.

Să observăm că o condiţie necesară şi suficientă pentru a avea $\nu_4(n) > 1$ este să existe $m > 1$ astfel încît toate numerele prime $p \leq m$ să dividă pe n.

Din definiţia lui ν_4 rezultă de asemenea că

$\nu_4(n) = m \Leftrightarrow$ n este divizibil prin orice $i \leq m$, dar nu prin $m+1$.

3.2.2. Propoziţie. Funcţia ν_4 satisface

$\nu_4(n_1 \underset{d}{\wedge} n_2) = \nu_4(n_1) \wedge \nu_4(n_2)$

Demonstraţie. Să notăm

$n = n_1 \underset{d}{\wedge} n_2$, $\nu_4(n) = m$, $\nu_4(n_i) = m_i$, $i = 1, 2$

Dacă $m_1 = m_1 \wedge m_2$, arătăm că $m = m_1$.

Din definiţia lui ν_4 rezultă

$\nu_4(n_i) = m_i \Leftrightarrow \{\forall\, i \le m_i \Rightarrow$ n este divizibil cu i dar nu cu $m_i + 1\}$

Dacă am avea $m < m_1$, atunci $m + 1 \le m_1 \le m_2$, deci $m+1$ divide pe n_1 şi pe n_2, deci $m+1$ divide pe n. Dacă $m > m_1$, atunci $m_1+1 \le m$, deci m_1+1 divide pe n.

Dar n divide pe n_1, deci m_1+1 divide pe n_1 şi propoziţia este demonstrată.

Să observăm că onotînd

$t_0 = \max\{\, i \,/\, j \le i \Rightarrow$ n este divizibil cu j$\}$

Atunci $\nu_4(n)$ se poate obţine rezolvînd problema de programare liniară

$$\max f(x) = \sum_{i=1}^{t_0} x_i \ln p$$

$$x_i \le a_i \text{ pentru } i = \overline{1, t_0}$$

$$\sum_{i=1}^{t_0} x_i \ln p_i \le \ln p_{t_0+1}$$

Dacă f_0 este valoarea maximă a lui f din această problemă, atunci $\nu_4(n) = e^{f0}$

De exemplu, $\nu_4(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11) = 6$

Desigur şi funcţia ν poate fi extinsă la mulţimea numerelor raţionale, prin acelaşi procedeu ca şi funcţia S.

3.3. Funcţii Smarandache de tipul unu, doi şi trei

Fie X o mulţime nevidă, $r \subset X \times X$ o relaţie de echivalenţă, $\hat{X}$ mulţimea claselor de echivalenţă corespunzătoare şi $(I, \leq)$ mulţime total ordonată.

3.3.1. Definiţie. Dacă $g: \hat{X} \to I$ este o funcţie injectivă oarecare, atunci funcţia

$$f: X \to I, \ f(x) = g(\hat{x}) \qquad (3.3.1.)$$

se numeşte funcţie de standardizare.

Despre mulţimea X vom spune în acest caz că este $(r, (I, \leq), f)$ standardizată.

3.3.2. Definiţie. Dacă r_1 şi r_2 sunt două relaţii de echivalenţă pe X, relaţia $r = r_1 \wedge r_2$ este determinată de condiţia

$$x\, r\, y \Leftrightarrow x\, r_1\, y \text{ şi } x\, r_2\, y \qquad (3.3.2)$$

Se observă cu uşurinţă că r este o relaţie de echivalenţă.

3.3.3. Definiţie. Funcţiile $f_i: X \to I$, $i = 1, s$, au aceeaşi monotonie dacă pentru orice $x, y \in X$ rezultă

$$f_k(x) \leq f_k(y) \Leftrightarrow f_j(x) \leq f_j(y), \ k, j = \overline{1, s}$$

3.3.4. Teoremă. Dacă funcţiile de standardizare $f_i: X \to I$, corespunzătoare relaţiilor de echivalenţă r_i, pentru $i = \overline{1, s}$, au aceeaşi monotonie, atunci funcţia

$$f = \max_i f_i$$

este o funcţie de standardizare corespunzătoare relaţiei $r = \bigwedge_{i=1}^{s} r_i$ şi este de aceeaşi monotonie cu funcţiile f_i.

Demonstraţie. Dăm demonstraţia acestei teoreme pentru cazul s = 2. În cazul general demonstraţia rezultă apoi prin inducţie.

Să notăm cu $\hat{x}_{r1}$, $\hat{x}_{r2}$ și $\hat{x}_r$ clasele de echivalență ale lui x corespunzătoare respectiv relațiilor de echivalență r_1, r_2 și $r = r_1 \wedge r_2$, iar cu $\hat{X}_{r1}$, $\hat{X}_{r2}$, $\hat{X}_r$ mulțimile cît corespunzătoare.

Avem $f_i(x) = g_i(\hat{x}_{ri})$, $i = 1,2$, unde $g_i: \hat{X}_{ri} \to I$ sunt funcții injective.

Funcția $g: \hat{X}_r \to I$ definită prin $g(\hat{x}_r) = \max(g_1(\hat{x}_{r1}), g_2(\hat{x}_{r2}))$ este injectivă. Într-adevăr, dacă $\hat{x}_r^1 \neq \hat{x}_r^2$ și $\max(g_1(\hat{x}_{r1}^1), g_2(\hat{x}_{r2}^1)) = \max(g_1(\hat{x}_{r1}^2), g_2(\hat{x}_{r2}^2))$, atunci datorită injectivității funcțiilor g_1 și g_2 avem de exemplu

$$\max(g_1(\hat{x}_{r1}^1), g_2(\hat{x}_{r2}^1)) = g_1(\hat{x}_{r2}^2) = \max(g_1(\hat{x}_{r1}^2), g_2(\hat{x}_{r2}^2))$$

și avem o contradicție, deoarece

$$f_1(x^2) = g(\hat{x}_{r1}^2) < g_1(\hat{x}_{r1}^1) = f_1(x^1)$$

$$f_2(x_1) = g_2(\hat{x}_{r1}^1) < g_2(\hat{x}_{r2}^2) = f_2(x^2)$$

deci f_1 și $f_2$nu sunt de aceeași monotonie.

Din injectivitatea lui g rezultă că funcția $f: X \to I$, $f(x) = g(\hat{x}_r)$ este o funcție de standardizare. În plus avem

$f(x^1) \leq f(x^2) \Leftrightarrow g(\hat{x}_r^1) \leq g(\hat{x}_r^2) \Leftrightarrow \max(g_1(\hat{x}_{r1}^1), g_2(\hat{x}_{r2}^1)) \leq \max(g_1(\hat{x}_{r1}^2), g_2(\hat{x}_{r2}^2)) \Leftrightarrow \max(f_1(x^1), f_2(x^1)) \leq \max(f_1(x^2), f_2(x^2)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow f_1(x^1) \leq f(x^2)$ și $f_2(x^1) \leq f_2(x^2)$ deoarece f_1 și f_2 au aceeași monotonie.

Să considerăm acum că și sunt două operații algebrice pe X, respectiv I.

3.3.5. Definiție. Funcția de standardizare $f: X \to I$ se spune că este Σ compatibilă cu operațiile $\top$ și $\perp$ dacă pentru orice $x, y \in X$ tripletul $(f(x), f(y), f(x \top y))$ satisface condiția Σ.

În acest caz, vom mai spune că funţia f Σ-standardizează structura (X, τ) pe structura (I, ≤ $\perp$).

Exemplu. Dacă f este funcţia Smarandache S: N* → N*, avem următoarele standardizări

(a) funcţia S, Σ_1 - standardizează (N*, •) în (N*, ≤, +) deoarece avem

(Σ_1): $S(a \cdot b) \leq S(a) + S(b)$

b) Funcţia S verifică de asemenea relaţia

(Σ_2): $\max (S(a), S(b)) \leq (S(a \cdot b) \leq S(a) \cdot S(b)$

deci această funcţie (Σ_2) standardizează structura (N*, •) în (N*, ≤, •).

Cu această introducere putem defini funcţiile Smarandache de primul tip.

Am văzut că funcţia Smarandache S' a fost definită cu ajutorul funcţiilor S_p avînd proprietăţile (a) şi (b) din paragraful 2.2. Amintim că pentru fiecare număr prim p funcţia S_p: N* → N* este definită de condiţiile

1) $S_p(n)!$ este divizibil cu p^n

2) $S_p(n)$ este cel mai mic întreg pozitiv avînd proprietatea 1).

Utilizînd definiţia fucnţiei de standardizare prezentăm în continuare [B_2] trei generalizări ale funcţiei S_p.

Vom nota cu M_n un multiplu de n.

3.3.6. Definiţie. Pentru orice n∈ N* relaţia $r_n \subset$ N* x N* este determinată de condiţiile

(i) Dacă $n = u^i$, cu u = 1 sau u = p - număr prim,

si $i \in N^*$, iar $a, b \in N^*$ atunci
$a r_n b \iff \exists k \in N^*$, $k! = Mu^{ia}$, $k! = Mu^{ib}$
si k este cel mai mic intreg pozitiv cu această proprietate

(ii) Dacă $n = p_1^{i1} \cdot p_2^{i2} \cdot \ldots p_s^{is}$, (3.3.4)

atunci

$$r_n = r_{p1}^{i1} \wedge r_{p2}^{i2} \wedge \ldots \wedge r_{ps}^{is}$$

3.3.7. Definitie. Pentru orice $n \in N^*$ functia Smarandache de primul tip este funcia numerică
$S_n: N^* \to N^*$ determinată de condiţiile
(i) Dacă $n = U^i$, cu U=1 sau U=p număr prim
atunci $S_n(a)$ este cel mai mic intreg pozitiv
K avand proprietatea $K! = Mu^{ia}$
(ii) Dacă $n = p_1^{i1}$ p_2^{i2} ... p_s^{is} atunci
$S_n(a) = \max_{1 \le i \le s}(S_{pj}^{ij}(a))$

Se observă că:

1. Funcţiile S_n sunt funcţii de standardizare corespunzătoare relaţiilor de echivalenţă r_n definite mai sus şi pentru n = 1 obţinem $\hat{x}_{r1} = N^*$, pentru orice $x \in N^*$, iar $s_1(n) = 1$ pentru orice $n \in N^*$.

2. Dacă n = p este un număr prim, atunci S_n este funcţia S_p definită de F. Smarandache.

3. Funcţiile S_n sunt crescătoare şi deci sunt de aceeaşi monotonie, în sensul definiţiei (3.3.3.).

3.3.8. Teoremă. Funcţiile S_n au proprietatea că Σ_1 standardizează $(N^*, +)$ pe $(N^*, \le, +)$ prin relaţia

(Σ_1): $\max(S_n(a), S_n(b)) \le S_n(a+b) \le S_n(a) + S_n(b)$

pentru orice $a, b \in N^*$ şi (Σ_2) standardizează structura $(N^*, +)$ pe

structura $(N^*, \leq, \cdot)$ prin

(Σ_2): $\max (S_n(a), S_n(b)) \leq S_n(a+b) \leq S_n(a) \cdot S_n(b)$

pentru orice $a, b \in N^*$

Demonstrație. Fie p un număr prim și $n = p^i$, cu $i \in N^*$, iar

$a^* = S_{p^i}(a)$, $b^* = S_{p^i}(b)$, $k = S_{p^i}(a+b)$

Atunci datorită definiției lui S_n numerele a^*, b^* și k sunt cele mai mici numere întregi pozitive cu proprietățile:

$a^*! = Mp^{ia}$, $b^*! = Mp^{ib}$, $k! = Mp^{i(a+b)}$.

Deoarece $k! = Mp^{ia} = Mp^{ib}$ rezultă $a^* \leq k$ și $b^* \leq k$, deci $\max (a^*, b^*) \leq k$, ceea ce demonstrează primele inagalități din (Σ_1) și (Σ_2).

Deoarece

$(a^* + b^*)! = a^*!(a^* + 1) \ldots\ldots (a^* + b^*) = Mp^{i(ab)}$ rezultă că avem $k \leq a^*+b^*$, deci (Σ_1) este verificată.

Dacă $n = p_1^{i1} \cdot p_2^{i2} \cdot \ldots p_s^{is}$, avînd în vedere cele de mai sus deducem

(Σ_1): $\max (S_{p_j^{i_j}}(a), S_{p_j^{i_j}}(b)) \leq S_{p_j^{i_j}}(a+b) \leq S_{p_j^{i_j}}(a) + S_{p_j^{i_j}}(b)$ pentru $j = \overline{i, s}$

În consecință

$\max (\max_j S_{p_j^{i_j}}(a), \max_j S_{p_j^{i_j}}(b)) \leq \max_j S_{p_j^{i_j}}(a+b) \leq$

$\leq \max_j (S_{p_j^{i_j}}(a)) + \max_j (S_{p_j^{i_j}}(b))$ pentru $j = \overline{i, s}$

Așadar

$\max (S_n(a), S_n(b)) \leq S_n(a+b) \leq S_n(a) + S_n(b)$

Pentru demonstrarea celei de-a doua inegalități din (Σ_2) să amintim că $(a+b)! \leq (ab)!$ dacă și numai dacă $a > 1$ și $b > 1$ și să

observăm că inegalitatea este satisfăcută pentru n = 1 deoarece

$S_1(a+b) = S_1(a) = S_1(b) = 1$

Fie acum n>1. Rezultă că pentru $a^* = S_n(a)$ avem $a^* > 1$.

Într-adevăr, dacă n are descompunerea (3.3.4.) atunci

$a^* = 1 \Leftrightarrow S_n(a) \max S_{p_j i_j}(a) = 1$

ceea ce implică $p_1 = p_2 = \dots = p_s = 1$, deci n = 1.

Prin urmare, pentru orice n > 1 avem

$S_n(a) = a^* > 1$ şi $S_n(b) = b^* > 1$

atunci $(a^*+b^*)! \leq (a^* \cdot b^*)!$ şi obţinem

$S_n(a+b) < S_n(a) + S_n(b) \leq S_n(a) \cdot S_n(b)$

În continuare prezentăm cîteva rezultate referitoare la monotonia funcţiilor Smarandache de primul tip.

3.3.9. Propoziţie. Pentru fiecare întreg pozitiv n funcţia Smarandache de primul tip S_n este crescătoare.

Demonstraţie. Dacă n este număr prim şi $k_1 < k_2$, ţinînd cont că avem

$(S_n(k_2))! = Mn^{k2} = Mn^{k1}$

rezultă $S_n(k_1) \leq S_n(k_2)$

Pentru n număr întreg oarecare fie

$S_{pm}(i_m k_1) = \max_{1 \leq j \leq k} S_{pj}(i_j k_1) = S_n(k_1)$

$S_{pt}(i_t k_2) = \max_{1 \leq j \leq r} S_{pj}(i_j k_2) = S_n(k_2)$

Deoarece

$S_{pn}(i_m k_1) \leq S_{pm}(i_m k_2) \leq S_{pt}(i_t k_2)$

rezultă că $S_n(k_1) \leq S_n(k_2)$ şi propoziţia este demonstrată.

3.3.10. Propoziţie. Şirul de funcţii $(S_p)_{i\in N^*}$ este monoton crescător pentru orice număr prim p.

Demonstraţie. Pentru orice $i_1, i_2 \in N^*$, cu $i_1 < i_2$ şi pentru orice $n \in N^*$ avem

$$S_p i_1(n) = S_p(i_1 \cdot n) \le S_p(i_2 \cdot n) = S_p i_2(n)$$

deci $S_p i_1 \le S_p i_2$ şi propoziţia este demonstrată.

3.3.11. Propoziţie. Fie p şi q numere prime date. Atunci

$p < q \Rightarrow S_p(k) < S_q(k)$ pentru orice $k \in N^*$.

Demonstraţie. Fie $k \in N^*$ şi

$$k = t_1 a_s(p) + t_2 a_{s-1}(p) + \dots + t_s a_1(p) \qquad (3.3.5.)$$

scrierea lui k în baza [p]. Se ştie că avem $0 \le t_i \le p-1$, pentru $i = \overline{1, s}$, iar ultima cifră semnificativă poate lua şi valoarea p.

Trecerea de la k la k+1 în (3.3.5.) pune în evidenţă următorul algritm:

(i) t_s este mărit cu o unitate

(ii) dacă t_s nu poate fi mărit cu o unitate, atunci t_{s-1} este mărit cu o unitate şi t_s devine zero.

(iii) dacă nici t_s nici t_{s-1} nu pot fi măriţi cu o unitate atunci t_{s-2} se măreşte cu o unitate, iar t_s şi t_{s-1} devine egali cu zero.

Procedeul continuă în acest fel pînă obţinem expresia lui k=1

Notăm cu

$$\Delta_k(S_p) = S_p(k+1) - S_p(k) \qquad (3.3.6.)$$

saltul funcţiei S_p cînd trecem de la k la k+1, urmînd procedeul descris mai înainte găsim

- în cazul (i) $\Delta_k(S_p) = p$

- în cazul (ii) $\Delta_k(S_p) = 0$

- în cazul (iii) $\Delta_k(S_p) = 0$

Se observă că

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_p) + S_p(1)$$

şi analog

$$S_q(n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_q) + S_q(1)$$

Ţinînd cont că $S_p(1) = p < q = S_q(1)$ şi utilizînd algoritmul de mai sus deducem că numărul de salturi cu valoarea zero a lui S_p este mai mare decît numărul de salturi cu valoarea zero a lui S_q şi respectiv numărul de salturi cu valoarea p a lui S_p este mai mic decît numărul de salturi cu valoarea q a lui S_q, de unde rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_p) + S_p(1) < \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_q) + S_q(1) \qquad (3.3.7.)$$

deci $S_p(n) < S_q(n)$, pentru orice $n \in N^*$.

Exemplu. Tabelul cu valorile lui S_2 şi S_3 pentru $0 < n \leq 20$ este

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
saltul		2	0	2	2	0	0	2	2	0	2	2	0	0	0	2	0	2	2	2
$S_2(k)$	2	4	4	6	8	8	8	10	12	12	14	16	16	16	16	18	18	20	22	24
saltul		3	3	0	3	3	3	0	3	3	3	0	0	3	3	3	0	3	3	3
$S_3(k)$	3	6	9	9	12	15	18	18	21	24	27	27	27	27	30	36	36	39	42	45

Deci $S_2(k) < S_3(k)$ pentru $k = \overline{1, 20}$

Observație. Pentru orice șir crescător de numere prime $p_1<p_2<\ldots<p_n<\ldots$ rezultă $S_1 < S_{p1} < S_{p2} < \ldots < S_{pn} <\ldots$ și dacă $n = p_1^{i} \cdot p_2^{i} \cdot\ldots\cdot p_t^{i}$ cu $p_1<p_2<\ldots<p_t$ atunci

$S_n(k) = \max_{1\le j\le k} S_{pj}i(k) = S_{pt}i(k) = S_{pt}(ik)$

3.3.12. Propoziție. Dacă p și q sunt numere prime și $p \cdot i < q$ atunci $S_p i < S_q$.

Demonstrație. Deoarece $p \cdot i < q$ rezultă

$$S_p i(1) \le p \cdot i < q = S_p(1) \qquad (3.3.8.)$$

și $S_p i(k) = S_p(ik) \le i\, S_p(k)$

Trecînd de la k la k+1, din (3.3.8.) deducem

$$\Delta_k(S_p i) \le \Delta_k(S_p) \qquad (3.3.9.)$$

Ținînd cont de propoziția 3.3.11 din egalitatea (3.3.9.) rezultă că trecînd de la k la k+1 obținem

$\Delta_k(S_p i) \le i\, \Delta_k(S_p) \le i \cdot p < q$ și

$$i \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_p) \le \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_q) \qquad (3.3.10.)$$

Deoarece avem

$$S_p i(n) = S_{pi}(1) + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_p i) \le S_p i(1) + i \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_p)$$

și

$$S_q(n) = S_q(1) + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(S_q)$$

din (3.3.8.) și (3.3.10) rezultă $S_p i(n) \le S_q(n)$ pentru orice $n \in N^*$ și propoziția este demonstrată.

3.3.13. Propoziție. Dacă p este număr prim, atunci $S_n < S_p$ pentru orice $n < p$.

Demonstrație. Dacă n este un număr prim, din inegalitatea $n < p$, utilizînd propoziția 3.3.11. rezultă $S_n(k) < S_p(k)$ pentru orice $k \in N^*$.

Dacă n este un număr compus $n = p_1^{i1} \cdot p_2^{i2} \cdot \ldots \cdot p_t^{it}$, atunci

$S_n(k) = \max_{1 \le j \le t} (S_{p_j^{i_j}}(k)) = S_{p_r^{i_r}}(k)$ şi deoarece $n < p$ rezultă că $p_r^{ir} < p$, deci cum $i_r p_r \le p_r^{ir} < p$, utilizînd propoziţia precedentă rezultă $S_{p_r^{i_r}}(k) \le S_p(k)$, deci $S_n(k) < S_p(k)$ pentru orice $k \in N^*$.

Trecem acum la prezentarea funcţiilor Smarandache de al doilea tip, aşa cum este ea definită în [B_2].

3.3.14. Definiţie. Funcţiile Smarandache de tipul doi sunt funcţiile $S^k: N^* \to N^*$ definite prin egalitatea

$S^k(n) = S_n(k)$ pentru orice $k \in N^*$ fixat, unde S_n este funcţia Smarandache de primul tip corespunzătoare lui n.

Observăm că pentru $k = 1$, S^k este chiar funcţia Smarandache S. Într-adevăr, pentru $n > 1$ avem

$$S^1(n) = S_n(1) = \max_j (S_{p_j^{i_j}}(1)) = \max (S_{p_j}(i_j)) = S(n)$$

3.3.15. Teoremă. Funcţile Smarandache de tipul doi Σ_3-standardizează structura $(N^*, \cdot)$ pe structura $(N^*, \le, +)$ prin

(Σ_3): $\max (S^k(a), S^k(b)) \le S^k(a \cdot b) \le S^k(a) + S^k(b)$

pentru orice $a, b \in N^*$ şi în acelaşi timp Σ_4-standardizează structura $(N^*, \cdot)$ pe structura $(N^*, \le, \cdot)$ prin

(Σ_4): $\max (S^k(a), S^k(b)) \le S^k(a \cdot b) \le S^k(a) \cdot S^k(b)$

pentru orice $a, b \in N^*$.

Demonstraţie. Relaţia de echivalenţă r^k corspunzătoare lui S^k este definită prin

$$a\, r^k\, b \Leftrightarrow \exists\, a^* \in N^*\ a^x! = Ma^k,\ a^*! = Mb^k \qquad (3.3.11.)$$

și a* este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea (3.3.11.). Prin urmare, putems pune că S^k este o funcție de standardizare atașată relației de echivalență r^k.

Să observăm că funcțiile Smarandache de tipul al doilea nu sunt de aceeași monotonie deoarece de exemplu $S^2(a) \le S^2(b) \Leftrightarrow S(a^2) \le S(b^2)$ și de aici nu rezultă $S^1(a) \le S^1(b)$.

Pentru fiecare a, b ∈ N*, fie $a^* = S^k(a)$, $b^* = S^k(b)$, $C = S^k(a{\cdot}b)$. Atunci a*, b* și C* sunt respectiv cele mai mici numere întregi pozitive cu proprietățile

$a^*! = Ma^k$, $b^*! = Mb^*$, $C^*! = M(a^k{\cdot}b^k)$ și deci $C^*! = Ma^k = Mb^k$,

de unde rezultă

$a^* \le C^*$, $b^* \le C^*$

ceea ce implică $\max(a^*, b^*) \le C^*$, adică

$\text{madx}\,(S^k(a), S^k(b)) \le S^k(a{\cdot}b)$ (3.3.12.)

Dar deoarece $(a^*+b^*)! = M\,(a^*!b^*!) = M(a^kb^k)$

rezultă că avem și $C^* \le a^* + b^*$, deci

$S^k(a{\cdot}b) \le S^k(a) + S^k(b)$ (3.3.13.)

Din (3.3.12) si (3.3.13) obtinem $\max(S^k(a), S^k(b)) \le S^k(a) + S^k(b)$
deci (Σ_3) este verificată.

În sfîrșit, deoarece $(a^*b^*)! = M\,(a^*!b^*!)$

rezultă că avem și

$S^k(a{\cdot}b) \le S^k(a) \cdot S^k(b)$

ceea ce demonstrează pe (Σ_4).

3.3.16. Propoziție. Pentru orice k. n ∈ N*, avem

$S^k9n) < n{\cdot}k$ (3.3.14.)

Demonstrație. Fie $n = p_1^{i1} \cdot p_2^{i2} \cdot \ldots \cdot p_t^{it}$ și

$$S(n) = \max_{1 \le j \le t} (S_{pj}(i_j)) = S(p_m^{im})$$

Atunci, deoarece

$$S^k(n) = S(n^k) = \max_{1 \le j \le t}(S_{pj} i_j k) = S(p_r^{i_r k}) \le k\, S(p_r^{ir}) \le k\, S(p_m^{im}) = k\, S(n)$$

și $S(n) \le n$, rezultă inegalitatea (3.3.14.).

3.3.17. Teoremă. Orice număr prim $p \ge 5$ este punct de maxim local pentru funcțiile S^k și $S^k(p) = p(k - i_p(k))$

unde i_p sunt funcțiile definite prin egalitatea (2.3.13.).

Demonstrație. Dacă $p > 5$ este un număr prim, partea întîi a teoremei rezultă din inegalitățile

$$S_{p-1}(k) < S_p(k) \text{ și } S_{p+1}(k) < S_p(k)$$

pe care le satisfac funcțiile Smarandache de primul timp.

A doua parte a teoremei rezultă din definiția funcțiilor S^k:

$$S^k(p) = S_p(k) = p(k - i_p(k))$$

și teorema este demonstrată.

Să observăm că avem și

$$S^k(p) = p \cdot k \text{ pentru } p \ge k.$$

3.3.18. Teoremă. Numerele kp, cu p număr prim și $p > k$, sunt puncte fixe pentru funcția S^k.

Demonstrație. Fie p un număr prim, $m = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha t}$ descompunerea în factori a lui m și $p > \max(m, 4)$. Atunci

$$p_i \alpha_i \le p_i^{\alpha i} < p \text{ pentru } i = \overline{1, t}$$

deci avem

$S^k(mp) = S((mp)^k) = \max_{1\le i\le t}(S_{p_i}(\alpha_i), S_p(k)) = S_p(k) = kp$

Pentru m = k obținem

$S^k(kp) = kp$

deci kp este punct fix pentru S^k.

3.3.19. Teoremă. Funcțiile S^k au următoarele proprietăți:

(i) $S^k = o(n^{1+\varepsilon})$ pentru $\varepsilon > 0$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{S(n^k)}{n} = k$$

Demonstrație. Avem

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{S^k(n)}{n^{1+\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{S(n^k)}{n^{1+\varepsilon}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{S^k(n)}{n^{1+\varepsilon}} = k \lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n^{1+\varepsilon}} = 0$$

și (i) este demonstrată.

De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{S^k(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{S(n^k)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S(p_n^k)}{p_n} = k$$

unde $(p_n)_{n\in N}$ este șirul numerelor prime.

3.3.20. Teoremă. Funcțiile Smarandache de tipul al doilea sunt în general crescătoare, în sensul că $\forall\, n \in N^* \;\exists\, m \ge m_0 \Rightarrow S^k(m) \ge S^k(n)$.

Demonstrație. Se știe [S_5] că funcția Smarandache este în general crescătoare, adică

$\forall\, t \in N^* \;\exists\, r_0 \in N^* \;\forall\, r \ge r_0 \Rightarrow S(r) \ge S(t)$ (3.3.15.)

Fie $t = n^k$ și r_0 astfel încît pentru orice $r \ge r_0$ avem $S(r) \ge S(n^k)$.

Fie de asemenea $m_0 = [\sqrt[k]{r_0}\,] + 1$. Desigur $m_0 \ge \sqrt[k]{r_0} \Leftrightarrow m_0^{\,k} \ge r_0$ si

$m \geq m_0 \Leftrightarrow m^k \geq m_0{}^k$.

Deoarece $m^k \geq m_0{}^k \geq r_0$ rezulta

$S(m^k) \geq S(n^k)$ adica $S^k(m) \geq S^k(n)$

Aşadar

$\forall\, n \in N^* \; \exists\, m_0 = [\sqrt[k]{r_0}\,] + 1 \; \forall\, m \geq m_0 \Rightarrow S^k(m) \geq S^k(n)$

unde $r_0 = r_0(n^k)$ este dat de (3.3.15.)

3.3.21. Teoremă. Fiecare număr $n = p!$, cu $p \geq \max(3, k)$, număr prim este punct de minim relativ al lui S^k.

Demonstraţie. Fie

$p! = p_1{}^{i1} \cdot p_2{}^{i2} \cdot \ldots \cdot p_m{}^{im} \cdot p$

descompunerea lui $p!$ în factori primi, astfel încît

$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_m < p$.

Deoarece $p!$ este divizibil cu $p_j{}^{ij}$, rezultă

$S(p_j{}^{ij}) \leq p = S(p)$ pentru orice $j = \overline{1, m}$.

Desigur

$S^k(p!) = S((p!)^k) = \max\limits_{1 \leq j \leq m}(S(p_j{}^{k.ij}), S(p^k))$

şi

$S(p_j{}^{ij}) \leq k\, S(p_j{}^{ij}) < k\, S(p) = kp = S(p^k)$

pentru $k \leq p$. Prin urmare

$S^k(p!) = S(p^k) = kp$ pentru $k \leq p$ (3.3.16.)

Dacă descompunerea lui $p!-1$ în factori primi este

$p!-1 = q_1{}^{i1} \cdot q_2{}^{i2} \cdot \ldots \cdot q_t{}^{it}$

atunci avem $q_j > p$ pentru $j = \overline{1, t}$

Rezultă

$$S(p!-1) = \max_{1\leq j\leq t}(S(q_j^{ij})) = S(q_m^{im})$$

cu $q_m \cdot p$, şi deoarece $S(q_m^{im}) > S(p) = S(p!)$ rezultă că

$$S(p!-1) > S(p!)$$

Analog se arată că $S(p!) + 1 > S(p!)$

Desigur

$$S^k(p!-1) = S((p!-1)^k) \geq S(q_m^{k \cdot im}) \geq S(q_m^{k}) > S(p^k) = k \cdot p \qquad (3.3.17.)$$

şi

$$S^k(p!+1) = S((p!+1)^k) > k \cdot p \qquad (3.3.18.)$$

Din (3.3.16.), (3.3.17.) şi (3.3.18.) rezultă demonstraţia teoremei.

În încheierea acestui paragraf vom prezenta funcţiile Smarandache de al treilea tip, aşa cum au fost ele definite de I. Bălăcenoiu în [B_2].

Să considerăm şirurile arbitrare

(a): $1 = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

(b): $1 = b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$

avînd proprietăţile

$$a_{kn} = a_k \cdot a_n,\ b_{kn} = b_k \cdot b_n \qquad (3.3.19.)$$

Desigur, există o infinitate de şiruri cu aceste proprietăţi deoarece alegînd o valoare arbitrară pentru a_{27} termenii următori din şirul (a) se determină punînd condiţia să fie satisfăcută relaţia de recurenţă.

Fie acum funcţia

$$f_a^b: N^* \rightarrow N^*,\ f_a^b(n) = S_{an}(b_n)$$

unde S_{an} este funcţie Smarandache de primul tip.

Se observă ușor că

(i) dacă $a_n = 1$ și $b_n = n$ pentru orice $n \in N^*$, rezultă $f_a^{\,b} = S_1$

(i) dacă $a_n = n$ și $b_n = 1$, pentru orice $n \in N^*$, rezultă $f_a^{\,b} = S^1$.

3.3.22. Definiție. Funcțiile Smarandache de tipul al treilea sunt funcțiile $S_a^{\,b}$ definite prin

$S_a^{\,b} = f_a^{\,b}$

în cazul cînd șirurile (a) și (b) diferă de cele care generează funcțiile S_1 și S^1.

3.3.23. Teoremă. Funcțiile $f_a^{\,b}$ au proprietatea că Σ_5-standardizează structura $(N^*, \cdot)$ pe structura $(N^*, \leq, +, \cdot)$ prin

(Σ_5): $\max(f_a^{\,b}(k), f_a^{\,b}(n)) \leq f_a^{\,b}(k \cdot n) \leq b_n\, f_a^{\,b}(k) = b_k f_a^{\,b}(n)$

Demonstrație. Fie

$f_a^{\,b}(k) = S_{a_k}(b_k) = k^*$, $f_a^{\,b}(n) = S_{a_n}(b_n) = n^*$

$f_a^{\,b}(k \cdot n) = S_{a_{k \cdot n}}(b_{k \cdot n}) = t^*$

Atunci k^*, n^* și t^* sunt cei mai mici întregi pozitivi pentru care

$k^*! = M(a_k^{\,b_k})$, $n^*! = M(a_n^{\,b_n})$, $t^*! = M(a_{nk}^{\,b_{nk}}) = M((a_k \cdot a_n)^{b_k \cdot b_n})$

și deci

$$\max(k^*, n^*) \leq t^* \qquad (3.3.20)$$

Mai mult, deoarece

$(b_k \cdot n^*)! = M((n^*!)^{b_k})$, $(b_n \cdot k^*)! = M((k^*!)^{b_n})$

$(b_k \cdot n^* + b_n \cdot k^*)! = M((b_k \cdot n^*)!(b_n \cdot k^*)!) = M((n^*!)^{b_k} \cdot (k^*!)^{b_n}) =$

$= M((a_n^{\,b_n})^{b_k} \cdot (a_k^{\,b_k})^{b_n}) = M((a_k \cdot a_n)^{b_k \cdot b_n})$

rezultă că

$$t^* \leq b_n \cdot k^* + b_k \cdot n^* \qquad (3.3.21.)$$

Din (3.3.20.) şi (3.3.21.) obţinem

$$\max(k^*, n^*) \le t^* \le b_n \cdot k^* + b_n \cdot n^* \qquad (3.3.22.)$$

Din această inegalitate rezultă (Σ_5), deci funcţia Smarandache de al treilea tip satisface

(Σ_6): $\max(S_a^{\,b}(k), S_a^{\,b}(n)) \le S_a^{\,b}(k \cdot n) \le b_n S_a^{\,b}(k) + b_k S_a^{\,b}(n)$

pentru orice $k, n \in N^*$

Exemplu. Fie şirurile (a) şi (b) determinate de $a_n = b_n = n$, cu $n \in N^*$. Funcţia Smarandace de al treilea tip corespunzătoare este

$S_a^{\,a}: N^* \to N^*$, $S_a^{\,a}(n) = S_n(n)$

şi (Σ_6) devine

$\max(S_k(k), S_n(n)) \le S_{k \cdot n}(k \cdot n) \le n\, S_k(k) + k\, S_n(n)$

pentru orice $k, n \in N^*$.

Această relaţie este echivalentă cu următoarea relaţie, scrisă cu ajutorul funcţiei Smarandache

$\max(S(k^k), S(n^n)) \le S((k \cdot n)^{k \cdot n}) \le n\, S(k^k) + k\, S(n^n)$.

Cuprins

p_2	r_2	p_1	r_1	$n=p_1^{r1}p_2^{r2}$	$F_S^d(n)$	Dacă $F_S^d(n)=n$, atunci
2	1	3	$1 \le r_1 \le 3$	$2 \cdot 3^{r1}$	$2+3r_1(r_1+1)$	$3 \mid 2$
2	1	5	$1 \le r_1 \le 2$	$2 \cdot 5^{r1}$	$2+5r_1(r_1+1)$	$3 \mid 2$
2	1	$p_1 \ge 7$	1	$2\ p_1$	$2+2\ p_1$	$0 = 2$
2	2	3	2	36	34	$34 = 36$
2	2	$p_1 \ge 5$	1	$4\ p_1$	$3\ p_1 + 6$	$p_1 = 6$
3	1	2	$2 \le r_1 \le 5$	$3 \cdot 2^{r1}$	$2r_1^2 - 2r_1 + 12$	$r_1 = 3$
3	1	$p_1 \ge 5$	1	$3\ p_1$	$2\ p + 3$	$p_1 = 3$
3	1	2	3	40	30	$30 = 40$

25 Lei